

38 Elektromagnetni valovi

Elektromagnetno polje – Elektromagnetni valovi – Ravno valovanje – Stojno valovanje – Energija valovanja – Valovni potenciali – Dipolno sevanje – Radijski valovi – Valovanje v snovi – Valovanje v dielektriku – Valovanje v prevodniku – Vpad na dielektrik – Vpad na prevodnik – Uklon na ovirah

38.1 Elektromagnetno polje

Mirujoči naboji so obdani s statičnim električnim poljem in stacionarni tokovi so obdani s statičnim magnetnim poljem. Elektrostatično in magnetostatično polje sta med seboj povsem neodvisna. Vemo pa, da se lahko naboji gibljejo in tokovi spreminjajo. Pridružena polja potem niso več statična, ampak se spreminjajo s časom. To so polja, ki jih hočemo sedaj raziskati.

Ohranitev nabojev Kakorkoli se naboji in tokovi že spreminjajo, vedno velja zakon o ohranitvi naboja. Po zgledu za ohranitev mase (36.37) zapišemo kontinuitetno enačbo

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (38.1)$$

Ohranitev pretokov Naboji so izvori in ponori električnih pretokov. Upravičeno se zdi predpostaviti, da se tudi pretoki ohranjajo, to je, da zakon o električnem pretoku (37.8) velja celo za naboje, ki se gibljejo. Podobno predpostavimo tudi za zakon o magnetnem pretoku (37.34). Postuliramo torej

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (38.2)$$

Indukcija električnega polja V spremenljivem magnetnem polju se, kot vemo, pojavlja električno polje, kakor ga zaznamo z indukcijsko tuljavo in priključenim balističnim galvanometrom. Zakon o dinamični indukciji (25.8) pove $\oint U dt = -S \Delta B$. Za majhno zanko ploščine S in obsega s v homogenem polju zapišemo odvisnost električnega polja od lokalne spremembe magnetnega polja kot $Es/S = -\Delta B/\Delta t$ oziroma v vektorski obliki

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (38.3)$$

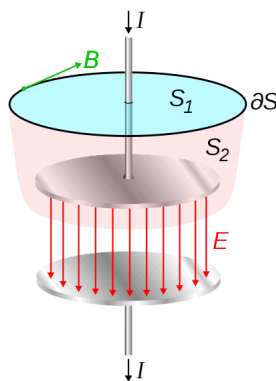
Indukcija magnetnega polja Vsako magnetno polje je, kakor vemo, povezano z lokalnim tokom: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. Če izračunamo divergenco te enačbe, vidimo, da je divergenca toka enaka divergenci rotorja polja; ta pa je za vsako polje enaka nič: $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Torej bi moral biti tok I skozi vsako zaprto ploskev enak nič. To pa gotovo ne more biti res, saj vemo, da lahko naboje kopičimo, na primer na eni plošči kondenzatorja. Enačba za rotor magnetnega polja zato ne more

biti popolna; manjka ji člen, ki bi zagotovil, da se bo divergenca enačbe reducirala v kontinuitetno enačbo, torej

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + [\text{missing}].$$

Kaj naj bi bil manjkajoči člen? Vsekakor mora zanj veljati $\nabla \cdot [\text{missing}] = \mu_0 \partial \rho / \partial t$. Gostoto naboja izrazimo iz električne divergenčne enačbe: $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$, zato $\partial \rho / \partial t = \partial / \partial t (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t)$. Iskani člen je potemtakem $[\text{missing}] = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, torej (MAXWELL)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (38.4)$$



Slika 38.1 Praznjenje kondenzatorja skozi upor. Magnetna cirkulacija po zanki ∂S je enaka ne glede na to, ali jo računamo iz toka I , ki prebada ploskev S_1 , ali iz "premikalnega toka" $\epsilon_0 \partial E / \partial t$, ki prebada ploskev S_2 . (Anon)

Osnovne enačbe polja

S tem je zaključen nabor štirih *osnovnih enačb elektrodinamike*, ki popolnoma opisujejo električno in magnetno polje: njuno povezanost z izvori ter njuno medsebojno odvisnost. Te enačbe so: dve divergenčni (38.2) in dve rotorski (38.3) (38.4). V stacionarnih razmerah se enačbe reducirajo na dva medsebojno neodvisna para: za elektrostatiko in za magnetostatiko. Kontinuitetna enačba ni neodvisna, ampak sledi iz četverice osnovnih enačb.

Kaj pravzaprav pravijo osnovne enačbe? Tole: v prostoru obstajajo električna in magnetna polja. Izvor električnih polj so naboji in spremenljiva magnetna polja. Izvor magnetnih polj so tokovi in spremenljiva električna polja. Električno in magnetno polje sta dva obraza istega, *elektromagnetnega polja*.

Osnovne enačbe elektrodinamike so posplošitve naših dosedanjih spoznanj o električnih in magnetnih poljih. Ne moremo jih izpeljati iz kakšnih drugih enačb; če bi jih lahko, ne bi bile več osnovne. Ali so pravilne ali ne, pa bomo sklepali na podlagi posledic, ki iz njih sledijo.

38.2 Elektromagnetni valovi

Osnovne enačbe v vakuumu

Za preučevanje elektromagnetnega polja so najpreprostejše razmere v vakuumu, kjer ni nabojev in tokov. Tam se osnovne enačbe glasijo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{38.5}$$

Valovne enačbe Na tretjo enačbo delujemo z rotorjem $\boldsymbol{\nabla} \times$. Na levi strani dobimo rotor rotorja, kar zapišemo kot $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ (32.19), pri čemer je člen z divergenco enak nič. Na desni strani zamenjamo vrstni red odvajanja $\boldsymbol{\nabla} \times \partial \mathbf{B} / \partial t = \partial / \partial t (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})$ in upoštevamo $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$. Tako dobimo enačbo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{38.6}$$

Podobno obdelamo četrto enačbo in dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{38.7}$$

Obe enačbi imata enako obliko. Opisujeta, kako se *elektromagnetna motnja* v vakuumu spreminja s časom. Očitno igra pri tem pomembno vlogo produkt električne in magnetne konstante. Da so enote v prostorskem in časovnem členu enake, mora imeti recipročna vrednost tega produkta enoto hitrosti na kvadrat, kar tudi drži. Zato definiramo novo konstanto

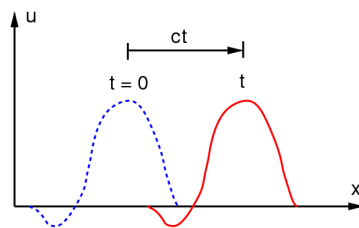
$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}. \tag{38.8}$$

Vstavimo številske vrednosti in dobimo $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Izjemno presenečenje! Saj to je vendar hitrost svetlobe, kakor smo jo svoj čas izmerili (27.1)! To ne more biti naključje. Sklepamo, da je svetloba elektromagnetno valovanje takšnih valovnih dolžin, ki jih vidimo, in da zapisani enačbi opisujeta elektromagnetne valove različnih vrst. Zato ju poimenujemo *valovni enačbi*.

Njihove rešitve V eni dimenziji se vsaka posamična komponenta valovnih enačb - označimo jo z u - zapiše v obliki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{38.9}$$

Če takšna enačba res opisuje valovanje, mora veljati tudi za *ravne valove* $u = u_0 \exp ik(x - ct)$, $k = 2\pi/\lambda$. Argument lahko zapišemo v priročnejši obliki $k(x - ct) = kx - \omega t$, kjer $\omega = ck$. Vstavitev v valovno enačbo potrди domnevo. Pa ne samo to: rešitev valovne enačbe je tudi vsota dveh ali več ravnih valov različnih valovnih dolžin, ki se vsi gibljejo z isto hitrostjo. Iz množice takih valov lahko sestavimo poljubno funkcijo $u_1(x - ct)$. To je hrib poljubne začetne oblike $u_1(x, 0)$, ki drsi, ne da bi spreminjal svojo obliko, vzdolž koordinatne osi s hitrostjo c .



Slika 38.2 Gibanje valovne motnje.

Druga taka funkcija je $u_2(x + ct)$, torej hrib drugačne oblike, ki se giblje v nasprotni smeri. Splošna rešitev valovne enačbe je vsota obeh:

$$u = u_1(x - ct) + u_2(x + ct). \quad (38.10)$$

38.3 Ravno valovanje

Ravno valovanje hočemo sedaj podrobneje preučiti. Naj potuje valovanje v smeri enotnega vektorja $\mathbf{n}$; potem zapišemo

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (38.11)$$

pri čemer $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$. Kaj o teh dveh nastavkih povedo divergenčne in rotorske enačbe?

Pravokotnost $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$

Nastavek za $\mathbf{E}$ vstavimo v divergenčno enačbo $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, računamo po komponentah in dobimo $i\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$, to je $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$. Vektor električne poljske jakosti je torej pravokoten na smer gibanja valovanja. Podobno ugotovimo za magnetno poljsko jakost: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Tudi vektor magnetne poljske jakosti je pravokoten na smer gibanja valovanja.

Povezava $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$

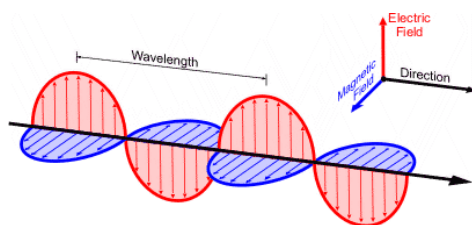
Nastavka za $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ vstavimo še v rotorsko enačbo $\nabla \times \mathbf{B} = -(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$, računamo po komponentah in dobimo $i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\mathbf{E}_0\omega/c^2$. Ker $\omega = kc$, dobimo

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n}. \quad (38.12)$$

Vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ sta torej med seboj pravokotna. Ker $|\mathbf{n}| = 1$ in $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, velja $|\mathbf{E}| = |c\mathbf{B}|$, to je

$$E = cB. \quad (38.13)$$

V ravnem valovanju torej nihata električna in magnetna poljska jakost sočasno: kjer je vozle prve, je tudi vozle druge, in kjer ima maksimum prva, ga ima tudi druga. Električni poljski jakosti 1 V/m je pri tem pridružena magnetna poljska jakost 10^{-9} Vs/m².



Slika 38.3 Ravni elektromagnetni val. (Anon)

38.4 Stojno valovanje

Amplitudna enačba Ravni valovi so rešitev valovne enačbe v neomejenem prostoru. Kakšne pa so njene rešitve v omejenem prostoru, recimo v zaprti kovinski škatli? Omejimo se le na take rešitve, pri katerih električno polje v vseh točkah niha sinhrono, torej

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (38.14)$$

Valovna enačba se v tem primeru poenostavi v *amplitudno enačbo*

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0 &= -k^2 \mathbf{E}_0 \\ k^2 &= \omega^2/c^2. \end{aligned} \quad (38.15)$$

Amplitude $\mathbf{E}_0$ stojnih valovanj so seveda odvisne od oblike resonantne škatle. Podobna amplitudna enačba velja tudi za magnetno polje.

Mejni pogoji Električno in magnetno polje na meji s prevodnikom ne moreta biti poljubna. V prevodniku se namreč naboji hipno prerazporejajo tako, da v njem ni električnega in magnetnega polja. — Mejo objamemo s tanko pravokotno zanko. Cirkulacija $\mathbf{E}$ po zanki je enaka spremembi pretoka $\mathbf{B}$ skozi njo. Ker lahko naredimo zanko zelo ozko, je sprememba pretoka skozi njo nič, torej $E_{\parallel}(1)l - E(2)l = 0$. V prevodniku je $\mathbf{E}(2) = 0$, zato na meji velja robni pogoj $E_{\parallel} = 0$. — Mejo objamemo še s plitvo pravokotno škatlo. Divergenca $\mathbf{B}$ skozi njo mora biti enaka nič, torej $B_{\perp}(1)S - B_{\perp}(2) = 0$. V prevodniku je $\mathbf{B}(2) = 0$, zato na meji velja robni pogoj $B_{\perp} = 0$.

Kvadratni resonator Najpreprostejši resonator je kvadratna škatla $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, $z \in [0, h]$. Poglejmo, če obstajajo taki valovi, pri katerih je $\mathbf{E}_0$ usmerjena vzdolž osi z in neodvisna od z , torej $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_z(x, y))$. Zaradi kratkosti bomo namesto E_z zanaprej pisali kar E . Amplitudno enačbo zapišemo v kartezičnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 E = 0. \quad (38.16)$$

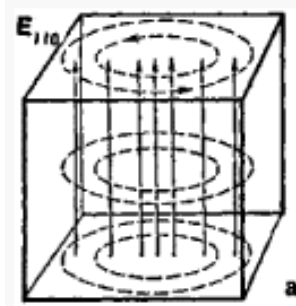
Rešitev iščemo z nastavkom $E(x, y) = X(x)Y(y)$. Dobimo $X''/X + Y''/Y = -k^2$. To je možno le, če je vsak izmed obeh členov enak konstanti: $X''/X = -k_x^2$ in $Y''/Y = -k_y^2$, pri čemer $k_x^2 + k_y^2 = k^2$. Rešitvi teh dveh enačb sta sinus ali kosinus. Da zadostimo pogoju na mejah $x = 0$ in $y = 0$, izberemo $\sin k_x x$ in $\sin k_y y$. Da zadostimo še pogoju na mejah $x = a$ in $y = b$, pa postavimo $k_x = m\pi/a$ in $k_y = n\pi/b$, $m, n = 1, 2, 3 \dots$ Iskane rešitve so torej

$$E_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (38.17)$$

Katerakoli izmed teh rešitev, recimo E_{11} , je dobra, prav tako pa katerakoli njihova linearna kombinacija, recimo $A \cdot E_{11} + B \cdot E_{12}$. Frekvenca nihanja znaša

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (38.18)$$

Ustrezno magnetno polje dobimo iz rotorske enačbe $\nabla^2 \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0$. Neposredni račun pove $B_x = (ik_y/\omega) \sin k_x x \cos k_y y$ in $B_y = -(ik_x/\omega) \cos k_x x \sin k_y y$. Imaginarni faktor i pove, da magnetno nihanje kasni za električnim za $\pi/2$. Polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ sta med seboj pravokotni, kar potrdimo z izračunom $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.



Slika 38.4 Stojno elektromagnetno valovanje E_{11} v kvadratnem resonatorju. Električne silnice so navpične, magnetne so krožne. (The Great Soviet Encyclopedia)

Cilindrični resonator

Kaj pa cilindrična votlina $\rho \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$? Spet iščimo polje, v katerem je $\mathbf{E}_0$ usmerjena vzdolž osi z in neodvisna od z , torej $E_z(\rho, \varphi)$ ali krajše kar E . Amplitudno enačbo potem zapišemo v cilindričnih koordinatah, upoštevajoč (32.25), kot

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0. \quad (38.19)$$

Izberemo nastavek $E = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ter ga vstavimo vanjo. Če dobljeno enačbo pomnožimo še z ρ^2 , postane njen drugi člen $(1/\Phi)d^2\Phi/d\varphi^2$, torej neodvisen od ρ , zato mora biti enak konstanti, ki jo zapišemo kot $-n^2$. Tako dobimo dve ločeni enačbi:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + [(k\rho)^2 - n^2]R &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (38.20)$$

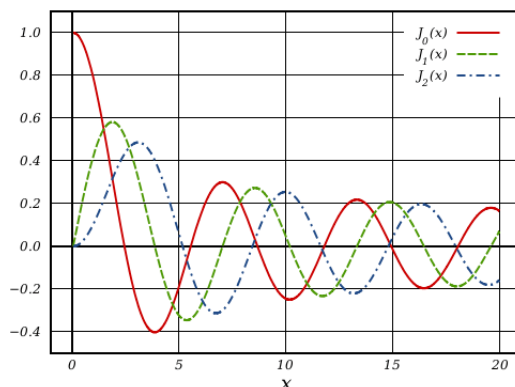
Rešitev druge enačbe je sinus ali kosinus argumenta $n\varphi$. Zanj moramo upoštevati periodični mejni pogoj $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, kar pomeni, da mora biti n celo število $0, 1, 2, 3 \dots$ in

$$\Phi(\varphi) = \cos n\varphi. \quad (38.21)$$

Prvo enačbo polepšamo z vpeljavo spremenljivke $k\rho = t$ v obliko $t^2 R'' + tR' + [t^2 - n^2]R = 0$. Rešitev iščemo z nastavkom v obliki potenčne vrste $R(t) = t^n \sum c_j t^j$. Vstavimo ga v enačbo in dobimo $\sum (n+j)^2 c_j t^{n+j} + [t^2 - n^2] \sum c_j t^{n+j} = 0$. Koeficiente c_j moramo zdaj tako izbrati, da bo enačba veljala. S precej truda najdemo

$$R(k\rho) = \sum_j \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^{2j+n} = J_n(k\rho). \quad (38.22)$$

Funkcije $J_0, J_1 \dots$ poimenujemo *cilindrične funkcije*.

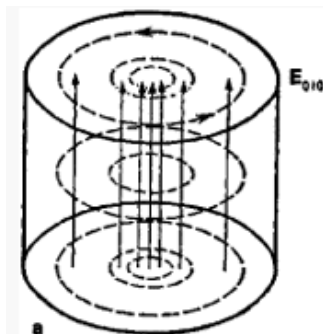


Slika 38.5 Cilindrične funkcije kot rešitve amplitudne enačbe v cilindričnih koordinatah. (Anon)

Na robu mora biti vsaka cilindrična funkcija enaka nič. Za funkcijo J_n moramo zato izbrati takšne vrednosti k_{nm} , $m = 1, 2, 3 \dots$, da $J_n(k_{nm}a) = 0$. Funkcija J_0 , na primer, ima prvo ničlo pri 2,4, zato mora biti $k_{01} = 2,4/a$. Iskana stojna valovanja v cilindrični votlini so torej

$$E_{nm} = J_n(k_{nm}\rho) \cos n\varphi. \quad (38.23)$$

Seveda je rešitev tudi katerakoli njihova linearna kombinacija. Frekvence nihanja pa so $\omega^2/c^2 = k_{nm}^2$. Ustrezno magnetno polje dobimo iz rotorske enačbe $\nabla^2 \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0$. Neposredni račun pove $B_\rho = (in/\omega\rho) J_n(k_{nm}\rho) \sin n\varphi$ in $B_\varphi = (-i/\omega) (dJ_n/d\rho) \cos n\varphi$. Magnetno polje je spet pravokotno na električnega in kasni za $\pi/2$.



Slika 38.6 Stojno elektromagnetno valovanje E_{01} v cilindričnem resonatorju. Električne silnice so navpične, magnetne so krožne. (The Great Soviet Encyclopedica)

38.5 Energija valovanja

Elektromagnetno polje deluje na naboje in jih premika. Če se naboj pospešuje, prejema od polja delo. Če naboj zavira, pa delo oddaja. Delo toka na časovno in prostorninsko enoto znaša $P/V = UI/SI = jE$.

Ohranitev energije

Iz osnovnih enačb hočemo izluščiti, kako je $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ povezan s polji. Gostota toka nastopa v magnetni rotorski enačbi. Skalarno jo pomnožimo z $\mathbf{E}/\mu_0$, da dobimo $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E}' - (1/\mu_0) \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$. Električno rotorsko enačbo pomnožimo z $\mathbf{B}/\mu_0$, da dobimo $\mathbf{B} \mathbf{B}'/\mu_0 + (1/\mu_0) \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$. Obe enačbi seštejemo in dobimo $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E}' + \mathbf{B} \mathbf{B}'/\mu_0 + (1/\mu_0) (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) = 0$. Prvi člen je iskano delo. Drugi in tretji člen, ki vsebujeta časovne odvode polj, zapišemo skupaj kot $\partial/\partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0)$. Izraz v oklepaju je

gostota energije polja w . Zadnji člen, ki vsebuje rotorje polj, zapišemo kot $\nabla \cdot (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Izraz v oklepaju je *gostota energijskega toka* $\mathbf{j}_{\text{em}}$. Dobili smo torej energijski zakon

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (38.24)$$

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$$

$$\mathbf{j}_{\text{em}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Energija polja se torej po prostoru raznaša z valovi. Lokalna sprememba gostote energije gre na račun energijskega pritoka/odtoka zaradi valov in na račun kinetične energije nabojev. Če se nosilci nabojev gibljejo v snovi z uporom, pridobi snov notranjo energijo.

Energija pri ravnem valovanju

Pri ravnem valovanju je gostota energije

$w = (\varepsilon_0/2)E^2 + (1/2\mu_0)B^2 = \varepsilon_0 E^2$, ker $B = E/c$. V vsaki točki prostora ta gostota niha. Kakšna je njene povprečna vrednost? Ker $\langle E^2 \rangle = (2/\pi) \int_0^{\pi/2} E_0^2 \cos^2 \omega t \, d\omega t = E_0^2/2$, velja

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2. \quad (38.25)$$

Gostota energijskega toka znaša $j_{\text{em}} = (1/\mu_0)EB = \varepsilon_0 c E^2$, torej

$$\langle j_{\text{em}} \rangle = c \langle w \rangle. \quad (38.26)$$

Sončna svetloba, ki vpada na Zemljo, nosi gostoto energijskega toka $\langle j_{\text{em}} \rangle \sim 1 \text{ kW/m}^2$. To pomeni, da je v njej gostota energije $\langle w \rangle \sim 10^{-6} \text{ J/m}^3$ in amplitudi elektromagnetnega polja $E_0 \sim 10^3 \text{ V/m}$ ter $B_0 \sim 10^{-6} \text{ Vs/m}^2$.

38.6 Valovni potenciali

Statično električno in statično magnetno polje smo opisali z električnim in magnetnim potencialom. Poskusimo s tema potencialoma opisati še spremenljivo elektromagnetno polje. Kot izhodišče služijo popolne osnovne enačbe elektrodinamike, ki vključujejo naboje in tokove.

Razklopitev osnovnih enačb

Najpreprostejše izmed osnovnih enačb je magnetna divergenčna enačba $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Ker je divergenca vsakega rotorja enaka nič, lahko zapišemo:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (38.27)$$

Polje $\mathbf{B}$ nastopa tudi v električni rotorski enačbi $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. Nadomestimo ga z (38.27), zamenjamo vrstni red odvajanja po času in prostoru ter dobimo $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$. Ker je rotor vsakega gradienta enak nič, lahko izraz v oklepaju zapišemo kot $-\nabla U$ in dobimo:

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (38.28)$$

V električni divergenčni enačbi $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ nadomestimo $\mathbf{E}$ z (38.28) in dobimo $\nabla^2 U - \partial/\partial t \nabla \cdot \mathbf{A} = \rho/\varepsilon_0$ (1).

Preostane še magnetna rotorska enačba $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + (1/c^2) \partial \mathbf{E}/\partial t$. Nadomestimo $\mathbf{B}$ z (38.27) in $\mathbf{E}$ z (38.28), upoštevamo obrazec za dvojni vektorski produkt in dobimo $-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (1/c^2) \partial/\partial t \nabla U + (1/c^2) \partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2 = \mu_0 \mathbf{j}$ (2).

V enačbi (2) lahko izberemo poljuben $\nabla \cdot \mathbf{A}$. Vemo namreč, da je rotor nedoločen do aditivnega gradienta: $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \varphi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \varphi = \nabla \times \mathbf{A}$. Pri tem je φ poljubno skalarno polje, torej tudi $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{A}$. Izberemo $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2) \partial U/\partial t$, se tako iznebimo dveh členov in dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (38.29)$$

Ista izbira za $\nabla \cdot \mathbf{A}$, postavljena v (1), pa pove

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (38.30)$$

Dobili smo dve valovni enačbi za električni in magnetni potencial. Vse spremenljivke so lepo ločene. Če so razmere stacionarne, odpadeta oba člena s časovnim odvodoma in enačbe preidejo v že znane potencialne enačbe, kakor tudi mora biti.

Zakasneni potenciali

Pri statičnih poljih je njihova jakost v opazovani točki popolnoma določena z naboji in tokovi po vsem prostoru. Domnevamo, da je pri spremenljivih poljih podobno, le da na vrednost polja v izbrani točki ob času t vplivajo naboji in tokovi z razdalj r ob ustrezno *zakasnenih časih* $t - r/c$. Saj se elektromagnetni vplivi širijo s končno hitrostjo. To je drzna, a plavzibilna domneva. Poskusimo jo dvigniti na raven izreka, to je, izpeljati jo iz znanih enačb.

V izhodišču koordinatnega sistema si mislimo točkast naboj $de(t)$, ki spreminja jakost, a se ne giblje. V izhodišču velja valovna enačba $\nabla^2 U - (1/c^2) \partial^2 U/\partial t^2 = -(de/dV)/\varepsilon_0$. Zunaj izhodišča je desna stran enaka nič.

Pričakujemo krogelno simetrično rešitev, zato krajevni člen zapišemo v krogelnih koordinatah: $\nabla^2 U = (1/r^2) \partial/\partial r (r^2 \partial U/\partial r)$. Vpeljemo substitucijo $U = u(r)/r$ in s postopnim odvajanjem od znotraj navzven - izračunamo $\nabla^2 U = (1/r) \partial^2 u/\partial r^2$. Namesto u zapišemo nazaj Ur in tako pridemo valovno enačbo v obliki $\partial^2 Ur/\partial r^2 - (1/c^2) \partial^2 Ur/\partial t^2 = 0$.

Dobljena enačba ni nič drugega kot enodimenzionalna valovna enačba za spremenljivko Ur , katere splošno rešitev že poznamo. Tako lahko zapišemo $U(r,t) = f(t-r/c)/r + g(t+r/c)/r$. To sta dva *krogelna vala*, od katerih se prvi giblje navzven in drugi

navznoter. Slednjega iz rešitve izpustimo, ker nas zanima, kako naboj dela valove in ne, kako od zunaj prihajajoči valovi vplivajo na naboj.

V bližini izhodišča je časovna zakasnitev zanemarljiva:

$U(t) = f(t - r/c)/r \approx f(t)/r$. Polje se spreminja sinhrono z nabojem.

Za takšno polje velja "statična" rešitev $U(t) = f(t)/r = de(t)/4\pi\epsilon_0 r$.

Nebližnje polje točkastega naboja, ki ima bližnje polje za limito, je zato $U(t) = de(t - r/c)/4\pi\epsilon_0 r$. Poljubno porazdeljeni naboji pa tvorijo v opazovani točki P superpozicijo

$$U_P(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t - r_{QP}/c) dV_Q}{r_{QP}}. \quad (38.31)$$

Podobno ugotovimo še

$$\mathbf{A}_P(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t - r_{QP}/c) dV_Q}{r_{QP}}. \quad (38.32)$$

Domneva je bila pravilna: polje je res opisano z *zakasnjnimi potenciali*.

38.7 Dipolno sevanje

Mirujoč električni dipolni oblak je obdan s statičnim električnim poljem. Če se električni moment oblaka spremeni, se spremeni tudi okolišnje električno polje, spremenljivo polje ustvari magnetno polje in tako naprej. Spremenljivi dipol torej okrog sebe ustvarja elektromagnetno polje. Kakšno je?

Spremenljivi dipol

Naj bo dipolni oblak v izhodišču koordinatnega sistema. Zanima nas polje v točki $\mathbf{R}$ iz izhodišča; proti tej točki naj kaže enotni vektor $\mathbf{n}$. Označimo lokacijo vsakega nabojnega elementa z $\mathbf{d}$ in oddaljenost od njega do opazovane točke z $\mathbf{r}$. Naj bo opazovana točka daleč proč. Potem velja $r \approx R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$.

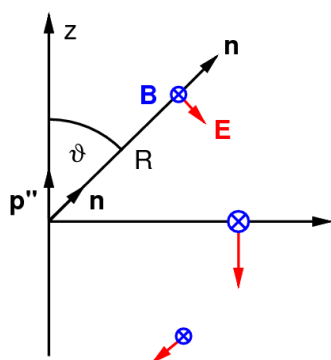
Zakasnjeni potencial $U(t)$ v opazovani točki je sorazmeren s prostorskim integralom $\rho(t - R/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}/c)/r$. Aproksimiramo $r \approx R$ in ga izvlečemo iz integrala, zanemarimo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$ v primerjavi z R in dobimo prostorski integral $\rho(t - R/c)$. Ker je oblak nevtralen, je ta integral enak nič. Torej je $U(t) = 0$ (1).

Podobno obravnavamo zakasnjeni potencial $\mathbf{A}(t)$ in pridemo do prostorski integral $\mathbf{j}(t - R/c)$. Upoštevamo $\int \mathbf{j} dV = \sum e\mathbf{v} = d/dt \sum e\mathbf{d} = \dot{\mathbf{p}}_e$, pa dobimo $\mathbf{A}(t) = \dot{\mathbf{p}}_e / 4\pi\epsilon_0 c^2 R$ (2).

Iz (1) in (2) sledi, ob uporabi $\mathbf{E} = -\nabla U - \partial \mathbf{A} / \partial t$, za magnetno polje okoli spreminjajočega se dipola

$$\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{p}}_e \times \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R}. \quad (38.33)$$

Drugi odvod električnega momenta je treba seveda upoštevati ob času $t - R/c$. Električno polje je povezano z magnetnim kakor pri ravnem valovanju.



Slika 38.7 Dipolno sevanje. Prikazano je polje $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ ob času t in vzročna sprememba dipola $\mathbf{p}''$ ob prejšnjem času $t - R/c$.

Če usmerimo os z koordinatnega sistema vzdolž vektorja $\mathbf{p}_e''$, velja:

$$B = \frac{p_e'' \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 R}. \quad (38.34)$$

Gostota energijskega toka $j_{em} = \epsilon_0 c^2 E B$ znaša

$$j_{em} = \frac{(p_e'' \sin \theta)^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \quad (38.35)$$

in izsevana moč $P = \oint \mathbf{j}_{em} d\mathbf{S}$ skozi obdajajočo kroglo

$$P = \frac{p_e''^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (38.36)$$

Nihajoči dipol

Svetloba je elektromagnetno valovanje in sevajo jo atomi. Sklepamo, da so sevajoči atomi pravzaprav električni dipoli, ki nihajo z različnimi frekvencami. Za nihajoč dipol $p_e = p_0 \cos \omega t$ izračunamo moč sevanja

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (38.37)$$

in povprečno moč (povprečje kvadrata kosinusa preko enega nihaja je $1/2$)

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (38.38)$$

Sevanje ni izotropno, ampak je svetilnost $I = dP/d\Omega = j_{em} R^2$ odvisna od polarnega kota:

$$\langle I \rangle = \frac{3}{2} \frac{\langle P \rangle}{4\pi} \sin^2 \theta. \quad (38.39)$$

Modro nebo

Bela sončna svetloba je mešanica elektromagnetnih valov z različnimi frekvencami/barvami. Ko valovi vpadajo v ozračje, se v plinskih molekulah (večinoma dušika in kisika) influencirajo električni dipoli in zanihajo. S tem začno sami sevati na vse strani; rečemo, da se je vpadna *svetloba sipala* na molekulah. Dipoli nihajo vsiljeno z isto frekvenco kot vpadajoča svetloba. Čim krajša je valovna dolžina svetlobe, tem močnejše je sipanje. Modra svetloba se sipa močnejše kot rdeča: zato je nebo modro.

Zvečer, ko je Sonce nizko nad obzorjem in je zato pot žarkov skozi ozračje dolga in sipanje veliko, pa je zahodno nebo bolj ali manj rdeče. Iz bele sončne svetlobe so se izsipale modre sestavine in preostal je višek rdečih. Če Zemlja ne bi imela ozračja, bi bilo nebo črno in podnevi bi videli zvezde. Tako mora biti na Mesecu.

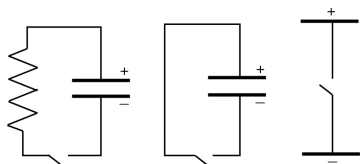
Zakaj pa so potem oblaki beli? Saj se svetloba vendar sipa tudi na kapljicah! In zakaj sploh vidimo kapljice, ko pa vodne pare, iz katere kapljice nastanejo, ne vidimo? Valovna dolžina vidne svetlobe je nekaj tisočkrat večja, kot je premer atomov. Zato molekula vode čuti homogeno nihajoče električno polje. Če se združi N molekul, nihajo sinhrono. Amplituda nihanja se poveča za N -krat, gostota sevanja pa za N^2 -krat. Kapljica postane vidna. Vendar pa kvadratno naraščanje ne traja v nedogled. Ko postane premer kapljice primerljiv z valovno dolžino svetlobe, nihajo molekule z medsebojnim faznim zamikom in začno interferirati destruktivno. Za modro svetlobo je ta meja dosežena že pri majhnih, za rdečo pa pri večjih kapljicah. Rdeče sipanje je zato močnejše od modrega in ga preglasi. Modra barva izgine in oblak postane bel.

38.8 Radijski valovi

Če nihajoči električni dipoli res širijo okrog sebe elektromagnetne valove, potem bi jih morale sevati tudi žice oziroma naprave, po katerih tečejo izmenični (torej spremenljivi) tokovi. Omrežna nihanja s frekvenco 50/s bi povzročila valove z valovno dolžino 6000 km. Takih valovnih dolžin v laboratoriju ne moremo meriti. Za valovno dolžino reda velikosti 1 m, primerne za poskuse, pa so potrebna nihanja tokov z ogromno frekvenco $3 \cdot 10^8$ /s. V kakšnih napravah bi lahko takšna nihanja nastajala?

Odprt nihajni krog

Spomnimo se na električni nihajni krog, sestavljen iz kondenzatorja in tuljave. Ko naelektrimo kondenzator in sklenemo stikalo, začne po krogu nihati tok sem in tja. Naboj se pretaka iz ena plošče kondenzatorja na drugo z visoko frekvenco (25.24); "čevljski" kondenzator in "čevljska" tuljava proizvajata nihanje s frekvenco 10^6 /s. Če raztegnemo nihajni krog, dobimo linearno "ogrodje", po katerem niha tok. Nihanje je tem hitrejše, čim manjši sta plošči in čim manj ovojev ima tuljava. V mejnem primeru se tuljava reducira v ravno žico. *Odprti nihajni krog* se preoblikuje v navadno žico s prevodnima ploščicama na obeh koncih. Dobili smo torej hitro nihajoč dipol, ki utegne res doseči željeno frekvenco. Če ga nabijemo in sklenemo stikalo, začne nihati.



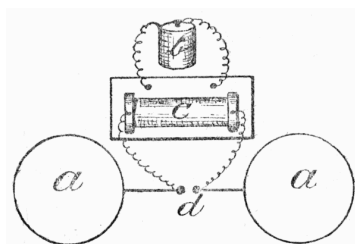
Slika 38.8 Zaprt in odprt nihajni krog. Plošči sta nasprotno enako nabiti. Ko sklenemo stikalo, zaniha naboj gor in dol. Nihajoč naboj je električni dipol, ki seva elektromagnetne valove.

Iskriščni oddajnik

Žal je nihanje odprtega nihajnega kroga dušeno in rešiti moramo vprašanje, kako ga znova in znova nabijati ter prožiti. K sreči se spomnimo na indukcijsko tuljavo s prekinjevalcem, ki med svojima izhodnima priključkoma ustvarja električne iskre, to je, priključka periodično nabija, da se potem medsebojno praznita [26.8]. Pa povežimo stikalna priključka dipola z izhodoma iz tuljave, ki jo opremimo s samodejnim prekinjevalcem (elektromagnetnim stikalom). Kaj lahko pričakujemo?

Tok prihaja iz tuljave v kratkih sunkih. Tak sunek pride ob času, ko prekinitevno stikalo (del indukcijske tuljave) prekine primarni tokokrog. To se zgodi morda 50-krat na sekundo. Tokovni sunek najprej nabije obe plošči nihajnega dipola, eno pozitivno in drugo negativno. Ko sta tako močno nasprotno naelektreni, kot je le mogoče, preskoči med kroglicama iskra. Zrak med kroglicama je sicer dober izolator, a ko preskoči iskra, se ionizira in postane kar dober prevodnik. Kakor hitro torej preskoči prva iskra, postaneta plošči povezani skoraj tako, kot z žico. In tako nastane prevodni nihajni krog. Zato začne po ioniziranem kanalu med kroglicama teči tok sem in tja z zelo visoko frekvenco. Zaradi upornosti pa izzveni mnogo prej kot v petdesetinki sekunde, ko pride nov sunek iz indukcijske tuljave. Medtem zrak postane spet izolator in igra se ponovi.

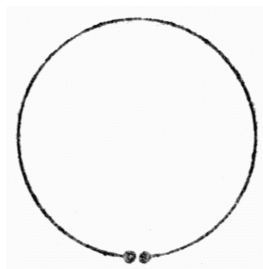
Vsak sunek iz indukcijske tuljave torej povzroči kratko dušeno nihanje toka z visoko frekvenco med obema ploščama. Nastal je nihajoči dipol, ki seva elektromagnetne valove v prostor. Pripravo poimenujemo *iskriščni oscilator*.



Slika 38.9 Iskriščni oscilator – oddajnik elektromagnetnih valov: (a) kovinske plošče, (b) baterija, (c) indukcijska tuljava, (d) iskrišče. (Corbin, 1917)

Iskriščni sprejemnik

Kako bi zaznali izsevane valove? Z indukcijo toka v sklenjeni žični zanki. Ko valovi potujejo skozi zanko, v njej inducirajo električno napetost in poženejo tok. Če je zanka preščitnjena in opremljena z zaključnima kroglicama, pa preko reže – upajmo – skačejo drobne iskrice. To je *iskriščni sprejemnik*. Namesto preščitnjene krožne zanke lahko uporabimo kar preščitnjeno ravno žico.



Slika 38.10 Iskriščni sprejemnik elektromagnetnih valov. (Corbin, 1917)

Poskusi z valovi

Tako. Sestavili smo oddajnik in sprejemnik (HERTZ); lotimo se zdaj poskusov. Oddajni dipol postavimo v gorišče paraboličnega kovinskega zrcala. S tem pričakujemo usmerjen curek valov. Otipavamo ga s sprejemnim dipolom, ki je prav tako postavljen v gorišče svojega paraboličnega zrcala, da se mu s tem poveča občutljivost.

Vključimo oddajnik. V nekaj metrov oddaljenem sprejemniku se pokažejo iskrice; tako drobne so, da jih opazimo le v popolni temi in pod povečevalno lupo. Elektromagnetni valovi torej res obstajajo! — V bližino oddajnika postavimo raven cinkov zaslon in s sprejemnikom otipamo polje pred njim. Najdemo maksimume in minimume, torej vozle stojnega valovanja. Iz razdalje med njimi določimo valovno dolžino ustvarjenih valov. Odvisna je od frekvence uporabljenega oddajnika, ta pa od njegove velikosti, oblike, razdalje iskrišča in še česa. Z majhnimi oddajnimi dipoli dosežemo valovne dolžine okrog 1 metra. — Curek valov ne prodira skozi kovinski zaslon, prodira pa skozi leseno steno. — Curek valov, vpadajoč na asfaltno prizmo, se lomi. — V curek valov postavimo rešetko iz vzporednih bakrenih žic in z njenim sukanjem ugotovimo, da so valovi polarizirani. Vsi ti poskusi potrjujejo: poleg vidne svetlobe obstajajo še drugi, metrski elektromagnetni valovi. Prav kakor vidni valovi se ti valovi transverzalni, se odbijajo in lomijo. Poimenovali jih bomo *radijski valovi*.

Vse barve teme

Obstoj metrskih radijskih valov nas navaja na misel, da obstajajo elektromagnetni valovi vseh valovnih dolžin, od najkrajših do najdaljših. Bolj ali manj samovoljno jih razdelimo na naslednje razrede: ultravijolična svetloba, vidna svetloba ($0,4\text{--}0,8\ \mu\text{m}$), infrardeča svetloba, mikrovalovi (nad $1\ \text{mm}$) in radijski valovi (nad $1\ \text{m}$). Zaradi kratkosti si bomo vzeli še pravico, da besedo "svetloba", kadar ne bo škode, uporabljamo v dveh pomenih: za vidno svetlobo in za poljubno elektromagnetno valovanje.

38.9 Valovanje v snovi

Osnovne enačbe v snovi

Čas je, da pogledamo, kakšen je medsebojni vpliv elektromagnetnega valovanja in snovi. Vemo že, da statično električno polje snov polarizira, pri čemer se v njej pojavijo vezani naboji. Statično magnetno polje pa snov magnetizira, pri čemer se pojavijo vezani tokovi. Pri spremenljivih poljih vse to

obvelja. Upoštevati pa moramo, da spremenljiva polarizacija doprinaša še dodaten tok (37.26). Tako zapišemo celoten naboj $\rho = \rho_{\text{free}} - \nabla \cdot \mathbf{P}$ in celoten tok $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{free}} + \nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{P}'$. Ta naboj in tok vstavimo v osnovne enačbe elektrodinamike in zlahka dobimo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) &= \frac{\rho_{\text{free}}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right).\end{aligned}\tag{38.40}$$

Linearna snov Z znanima aproksimacijama za linearno snov $\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0 = \varepsilon \mathbf{E}$ in $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu$ pa dobimo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} &= \frac{\rho_{\text{free}}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{38.41}$$

Pričakujemo, da sta dielektričnost ε in permeabilnost μ odvisna od frekvence valovanja. V prevodnikih moramo upoštevati še dodatno povezavo $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Mejni pogoji Zapisane enačbe veljajo tako za homogeno kot za heterogeno snov, to je, dielektričnost in permeabilnost sta lahko funkciji kraja. Na zunanjih mejah obravnavanega telesa ali na notranjih mejah med dvema telesoma pričakujemo ustrezne *robne pogoje*. Poskusimo jih določiti.

Mejo med snovjo (1) in (2), na kateri ni prostih nabojev in tokov, zapremo v nizko škatlo. Pretočni enačbi $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ in $\oint \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ povesta

$$\begin{aligned}B_{\perp}(1) &= B_{\perp}(2) \\ \varepsilon_1 E_{\perp}(1) &= \varepsilon_2 E_{\perp}(2).\end{aligned}\tag{38.42}$$

Mejo zaprimo še v ozko zanko. Ker je zanka ozka, velja $\oint \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$ in $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$. Cirkulacijski enačbi $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ in $\oint \mathbf{B}/\mu \cdot d\mathbf{s} = 0$ potem povesta

$$\begin{aligned}E_{\parallel}(1) &= E_{\parallel}(2) \\ B_{\parallel}(1)/\mu_1 &= B_{\parallel}(2)/\mu_2.\end{aligned}\tag{38.43}$$

Pri prehodu iz ene snovi v drugo se torej ne spremenita normalna magnetna komponenta in tangentska električna komponenta polja. Ostali dve komponenti doživita skokovito spremembo.

38.10 Valovanje v dielektriku

Hitrost valovanja Pomemben primer valovanja v snovi je valovanje v neomejenem homogenem izolatorju, kjer ni prostih nabojev in tokov, recimo v vodi. V osnovnih enačbah zato postavimo ustrezne člene na nič. Ker sta dielektričnost in permeabilnost konstanti, ju izpostavimo pred operatorje odvajanja po prostoru in času. Tako dobimo nabor štirih enačb: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ in $\nabla \times \mathbf{B} = (\epsilon \mu / c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t$. Ta nabor je formalno identičen tistemu za prazen prostor, če označimo $\epsilon \mu / c^2 = 1/v^2$. To pomeni, da je rešitev enačb ravno valovanje, ki se širi s hitrostjo

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (38.44)$$

Lom in dielektričnost S hitrostjo valovanja je definiran lomni količnik snovi $n = c/v$, torej

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (38.45)$$

Permeabilnost izolatorjev se ne razlikuje znatno od 1, zato $n \approx \sqrt{\epsilon}$. Tako smo odkrili še eno povezavo med elektromagnetizmom in svetlobo.

Eksperimentalni test Lomni količnik in dielektričnost znamo meriti neodvisno. Prva količina bi moral biti enaka korenu iz druge. Meritve pokažejo za zrak pri standardnih pogojih obakrat 1,0003, torej odlično ujemanje. Zelo dobro je nasploh ujemanje pri žlahtnih plinih (npr. He), simetričnih dvoatomnih plinih (H_2 , O_2 , N_2) in kovinskih parah. So pa tudi izjeme. Lomni količnik tekoče vode znaša 1,33, koren iz njene (statične) dielektričnosti pa kar 9. Razlaga je hitro pri roki. Molekula vode ima permanentni električni moment. Polje tako hitro niha, da mu molekularni dipoli ne uspejo slediti. Preden se povsem usmerijo v trenutno smer polja, se to že obrne v nasprotno smer.

38.11 Valovanje v prevodniku

Kaj pa valovanje v neomejenem homogenem prevodniku, to je v kovini s prostimi elektroni? Tam se lahko kopičijo prosti neto naboji in tečejo prosti tokovi. Privzamemo, da se morebitni neto naboji takoj razpršijo (zaradi odbijanja), to je, postavimo člen $\rho/\epsilon_0 = 0$. S tokovi pa ni tako. Člena $\mu_0 \mathbf{j}$ ne smemo izničiti, ampak upoštevamo $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ in dobimo naslednje štiri enačbe: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ in $\nabla \times \mathbf{B} = (\epsilon \mu / c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t + (\sigma \mu / \epsilon_0 c^2) \mathbf{E}$. Na električno rotorsko enačbo delujemo z rotorjem $\nabla \times$, na levi strani uporabimo obrazec za dvojni vektorski produkt in črtamo člen z električno divergenco, na desni strani zamenjamo vrstni red časovnega in prostorskega odvoda ter substituiraemo $\nabla \times \mathbf{B}$ iz magnetne rotorske enačbe. Tako dobimo $\nabla^2 \mathbf{E} - (\epsilon \mu / c^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 - (\sigma \mu / \epsilon_0 c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ (1). To je valovna enačba z dodatnim členom.

Kompleksni lomni količnik Enačbo (1) poskušamo rešiti v eni dimenziji s kompleksnim nastavkom $\hat{E} = E_0 \exp(ikx - i\omega t)$. Vstavitev v reševano enačbo da

povezavo $\hat{k} = (\omega/c)\sqrt{(\epsilon\mu + i\sigma\mu/\epsilon_0\omega)}$. Upoštevamo, da so permeabilnosti enake 1 (razen pri feromagnetikih) in dobimo

$$\hat{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\hat{\epsilon}} \quad (38.46)$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} i.$$

Pridelali smo kompleksni valovni vektor in, z definicijo, kompleksno dielektričnost. To, da je račun izvirgel kompleksni valovni vektor, čeravno smo (potiho) predpostavili, da je realen, nas ne bi smelo motiti. Saj so vsi računski postopki potekali tako, da so bili skupni realnim in kompleksnim količinam.

Po zgledu realnih količin definiramo še *kompleksni lomni količnik*

$$\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}}. \quad (38.47)$$

Iz enačb $\hat{\epsilon} = \epsilon' + \epsilon'' i$ in $\hat{n}^2 = (n' + n'' i)^2 = (n'^2 - n''^2) + 2n'n'' i$ razberemo $\epsilon' = n'^2 - n''^2$ in $\epsilon'' = 2n'n''$. K tema dvema enačbama obratni enačbi sta

$$n' = \sqrt{\frac{|\hat{\epsilon}| + \epsilon'}{2}} \quad (38.48)$$

$$n'' = \sqrt{\frac{|\hat{\epsilon}| - \epsilon'}{2}},$$

Ekstinkcijski
koeficient

kjer $|\hat{\epsilon}| = \sqrt{(\epsilon'^2 + \epsilon''^2)}$. Kakšen pa je pomen realnega in imaginarnega dela lomnega količnika? Ker $\hat{k} = (\omega/c)\hat{n} = k_0(n' + in'')$, je ob izbranem trenutku $E \propto \exp(ikx) = \exp(ik_0n'x) \cdot \exp(-k_0n''x)$. To je (zamrznjen) dušeni val s prostorsko frekvenco k_0n' in eksponentno pojemajočo amplitudo. Energijski tok $j \propto |E|^2 = \exp(-2k_0n''x) = \exp(-\beta x)$ pojema eksponentno z razdaljo. Pri vpadu valovanja na prevodnik torej realni del lomnega količnika določa prostorsko frekvenco, to je, igra vlogo "navadnega" lomnega količnika. Imaginarni del pa določa koeficient dušenja. Zato zapišemo

$$\hat{n} = n + \frac{\beta c}{2\omega} i = n + \kappa i. \quad (38.49)$$

Imaginarni del lomnega količnika poimenujemo *ekstinkcijski koeficient* in ga označimo s κ . Kovine so za vidno svetlobo neprosojne, zato v njih ne moremo meriti niti loma niti dušenja. Kompleksni lomni količnik kovin zato ostaja do nadaljnjega nemerljiva količina.

38.12 Vpad na dielektrik

Odbojni zakon

Ravno valovanje naj vpada z leve proti desni na navpično mejo med dvema dielektrikoma. Namesto snovi je veljaven tudi vakuum. Meja naj leži pravokotno na os x koordinatnega sistema pri $x = 0$. Vpadno valovanje je $u_1 = A_1 \exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)$ in odbito

valovanje $u_2 = A_2 \exp i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)$. Zahtevamo zveznost faze na mejni ploskvi v vsakem trenutku: $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t$. Iz tega najprej sledi $\omega_1 = \omega_2$. Frekvenca odbitega valovanja je enaka kot frekvenca vpadnega valovanja, kakor tudi mora biti.

Za vsak vektor $\mathbf{r}$, ki kaže na mejo, zahteva zveznost faze tudi $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$, torej $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} = 0$. To pomeni, da je $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ pravokoten na mejo oziroma $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \mathbf{n} = 0$. Sledi $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n} - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{n} = 0$ oziroma $k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$. Ker potujeta vpadno in odbito valovanje po isti snovi, je $k_1 = k_2$, zato

$$\alpha_1 = \alpha_2. \quad (38.50)$$

To je znani *odbojni zakon* (12.1). Odbiti kot je enak vpadnemu, kakor tudi mora biti. Ker $c_2 = \omega_2/k_2 = \omega_1/k_1$, je seveda enaka tudi hitrost: $c_2 = c_1$.

Lomni zakon

Namesto odbitega valovanja glejmo sedaj prepuščeno valovanje. Označimo ga z indeksom 2. Razmišljanje je enako. Zveznost faze zahteva najprej $\omega_1 = \omega_2$. Prepuščeno valovanje ima isto frekvenco kot vpadno. Tako tudi mora biti. Druga zahteva, namreč $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$, pa vodi do $k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$. Upoštevamo $k_1 = \omega_1/c_1$ in $k_2 = \omega_2/c_2 = \omega_1/c_2$, pa dobimo

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}. \quad (38.51)$$

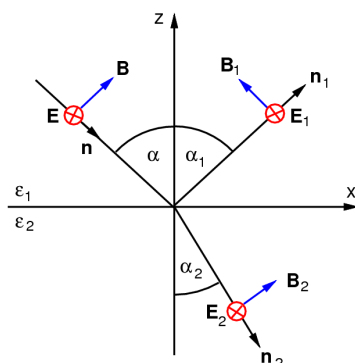
To je znani *lomni zakon* (12.3). Enačbo pomnožimo s c in dobimo

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (38.52)$$

Prepuščeno valovanje je zlomljeno, kakor tudi mora biti. Kolikšen je lom, določata hitrosti valovanja v prvi in drugi snovi. Hitrost v snovi je zmanjšana za faktor n glede na hitrost v vakuumu. Za isti faktor je zmanjšana tudi valovna dolžina, saj ostaja frekvenca nespremenjena.

Odbojnost in prepustnost

Kolikšen delež energije pa se odbije oziroma prepusti skozi mejo? Naj bo električna poljska jakost vpadajoče svetlobe pravokotna na vpadno ravnino. Iz slike razberemo naslednje.



Slika 38.11 Vpad svetlobe na dielektrik. Del svetlobe se odbije in del nadaljuje pot. Prikazan je ravni val, v katerem je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino.

Za vpadno svetlobo: $E_y = A \exp i k_1 s$, $B_x = (n_1/c) A \cos \alpha \exp i k_1 s$, $B_z = (n_1/c) A \sin \alpha \exp i k_1 s$. Za odbito svetlobo: $E_y = B \exp i k_1 s_1$,

$B_x = -(n_1/c) B \cos \alpha \exp ik_1 s_1$, $B_z = (n_1/c) B \sin \alpha \exp ik_1 s_1$. In za prepuščeno svetlobo: $E_y = C \exp ik_2 s_2$, $B_x = (n_2/c) C \cos \alpha_2 \exp ik_2 s_2$, $B_z = (n_2/c) C \sin \alpha_2 \exp ik_2 s_2$. — Komponenta E_y mora biti zvezna: $A \exp ik_1 s + B \exp ik_1 s_1 = C \exp ik_2 s_2$, zato mora pri $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ in $s = 0$ veljati $A + B = C$ (1). — Komponenta B_x mora tudi biti zvezna: $(n_1/c) A \cos \alpha - (n_1/c) B \cos \alpha = (n_2/c) C \cos \alpha_2$, torej $n_1(A - B) \cos \alpha = n_2 C \cos \alpha_2$ (2). — Iz enačbe (1) izrazimo C in ga vstavimo v enačbo (2). Iz tako dobljene enačbe izrazimo količnik B/A , to je, razmerje odbojne in vpadne amplitude, ter ga kvadriramo $R = |B/C|^2$, da dobimo razmerje odbitega in vpadnega toka oziroma *odbojnost* (FRESNEL)

$$R_{\perp} = \left| \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \alpha_2} \right|^2. \quad (38.53)$$

Enačbo lahko polepšamo. Vanjo substituiramo $n_2 = n_1 \sin \alpha / \sin \alpha_2$ ter z uporabo sinusa vsote oziroma razlike kotov dobimo

$$R_{\perp} = \left| \frac{\sin(\alpha - \alpha_2)}{\sin(\alpha + \alpha_2)} \right|^2. \quad (38.54)$$

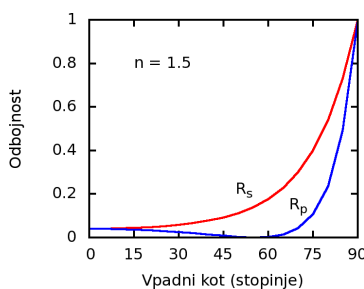
Podobno računamo za vpadajočo svetlobo, pri kateri je električna poljska jakost vzporedna z vpadno ravnino. Dobimo (FRESNEL)

$$R_{\parallel} = \left| \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \alpha_2} \right|^2 \quad (38.55)$$

in

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\tan(\alpha - \alpha_2)}{\tan(\alpha + \alpha_2)} \right|^2. \quad (38.56)$$

Vsota odbitega in prepuščenega toka je enaka vpadnemu toku, zato je z odbojnim količnikom podan tudi prepustni količnik oziroma *prepustnost*: $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$ in $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$.



Slika 38.12 Izračunani odbojni količnik za steklo ($n = 1,5$).

Sončna svetloba ni polarizirana, ampak je enakomerna mešanica raznosmerno polariziranih valov. Zanj velja $R = (R_{\perp} + R_{\parallel})/2$ ter $R + T = 1$.

Pravokotni vpad

Pri pravokotnem vpadu, ko $\alpha = 0$ in zato tudi $\alpha_2 = 0$, ni razlike med pravokotno in vzporedno usmerjenostjo električne jakosti, in odbojni količnik znaša

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2. \quad (38.57)$$

Od vode se torej odbije le 2 % vpadle energije in od stekla 4 %. Na okenski šipi se odbija svetloba od obeh ploskev, torej skupaj okrog 8 %, če zanemerimo višje odboje.

Polarizacijski kot Kadar $\alpha + \alpha_2 = 90^\circ$ je tangens neskončen in $R_{\parallel} = 0$. Pri katerem vpadnem kotu α_B se to zgodi? Pri $n_1 \sin \alpha_B = n_2 \sin (90^\circ - \alpha_B) = n_2 \cos \alpha_B$, torej pri

$$\alpha_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}. \quad (38.58)$$

To je že poznani *polarizacijski kot* [27.5]. Za vodo znaša 53° in za steklo 56° . Vzporedno polarizirana svetloba, vpadajoča pod tem kotom, se nič ne odbije, ampak se le lomi. Če je vpadajoča svetloba poljubno polarizirana, se njena vzporedna komponenta nič ne odbije, preostane le pravokotna komponenta. Odbita svetloba je zato polarizirana v smeri pravokotno na vpadno ravnino. Slika Sonca na vodni gladini, ki je vidimo pod kotom $90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$ pod očesno vodoravnico, je popolnoma vodoravno polarizirana.

38.13 Vpad na prevodnik

Kaj pa vpad svetlobe iz dielektrika na prevodnik, recimo iz zraka na zglajeno srebrno ploščo? Pri vpadu svetlobe na dielektrik smo upoštevali le, da je dielektričnost na obeh straneh meje različna. Nič nismo zahtevali, da je realna, čeravno smo samoumevno tako računali. Zato vse izpeljane enačbe valjajo v nespremenjeni obliki, če v njih nadomestimo realne lomne količnike s kompleksnimi. Takšne pa imajo, kot vemo, prevodniki. Ugotovimo naslednje.

Odboj in lom Odbojni zakon ostane nespremenjen.

Lomni zakon se v kompleksni podobi glasi:

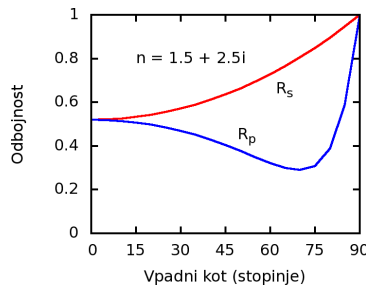
$$\hat{n}_2 \sin \hat{\alpha}_2 = n_1 \sin \alpha_1. \quad (38.59)$$

Da je leva stran enačbe kompleksna in desna realna, ni razlog za skrb. Saj so realna števila pravzaprav kompleksna števila z ničelno imaginarno komponento. S tem postane sinus lomnega kota kompleksna funkcija kompleksnega argumenta $\sin \hat{z} = (\exp i\hat{z} - \exp(-i\hat{z}))/2i$. Podobno velja za kosinus: $\cos \hat{z} = (\exp i\hat{z} + \exp(-i\hat{z}))/2$. Med seboj sta obe funkciji povezani $\sin^2 \hat{z} + \cos^2 \hat{z} = 1$. S to povezavo izluščimo iz lomnega zakona, da znaša kosinus lomnega kota

$$\hat{n}_2 \cos \hat{\alpha}_2 = \sqrt{\hat{n}_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}. \quad (38.60)$$

Odbojnost in prepustnost Enačbe za odbojne in prepustne količnike ostajajo nespremenjene, le da so v njih faktorji $\hat{n}_2$ in $\cos \hat{\alpha}_2$ kompleksni.

Številске vrednosti $R_{\parallel}(\alpha)$ in $R_{\perp}(\alpha)$ za dani snovi n_1 in $\hat{n}_2$ zato izračunamo brez težav, pač po pravilih kompleksne aritmetike.



Slika 38.13 Izračunani odbojni količnik za vpad svetlobe iz zraka ($n = 1,0$) na hipotetični prevodnik ($n = 1,5 + 2,5 i$).

Grafi kažejo, da prevodniki – zaradi velikega ekstinkcijskega koeficienta – močno odbijajo svetlobo pri vseh vpadnih kotih. Ne obstaja pa kot, pri katerem bi se odbojnost zmanjšala na nič. Namesto tega obstaja *glavni kot*, pri katerem ima odbojnost rahel minimum. Odboji od prevodnikov pri tem kotu zato niso znatno polarizirani. Vse to potrjujejo tudi eksperimenti z zglajenimi kovinami, recimo s srebrom ali z aluminijem.

Tudi enačba za odboj pri pravokotnem vpadu ostaja nespremenjena. Zaradi preproste oblike pa jo lahko zapišemo tudi eksplicitno z obema komponentama lomnega količnika:

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2 + \kappa_2^2}{(n_2 + n_1)^2 + \kappa_2^2}. \quad (38.61)$$

Enačba omogoča izračun ene izmed treh količin R , n_2 in κ_2 , če sta drugi dve poznani. Če torej uspemo izmeriti ekstinkcijski koeficient merjenja, je z meritvijo odbojnosti določen tudi njegov lomni količnik.

38.14 Uklon na ovirah

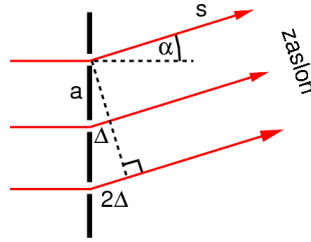
Valovanje, ki vpada na raven zaslon z odprtino, se za njim uklanja. Valovanje v izbrani točki za zaslonom je vsota krogelnih elementarnih valov iz vsake točke odprtine. Posebej preprost je uklon, pri katerem vpada ravno valovanje pravokotno na zaslon. Izvorna valovanja imajo tedaj povsod po odprtini enako amplitudo in enako fazo. Tedaj velja za "zamrznjeno" valovanje v točki P za oviro superpozicija $u_P \propto \int dS \exp(iks)/s$, pri čemer je s razdalja od točkovnega izvora do opazovane točke. Če opazujemo uklonsko sliko daleč za zaslonom, je s približno konstanten in ga lahko izvlečemo izpod integrala. Tedaj velja

$$u_P \propto \int \exp(iks) dS. \quad (38.66)$$

Izračunajmo uklonjene energijske tokove za mrežico iz tankih rež, za široko režo in za okroglo odprtino!

Mrežica tankih rež

Slika kaže, da moramo izračunati vsoto $u_P \propto \exp iks_1 + \exp ik(s_1 + \Delta) + \exp ik(s_1 + 2\Delta) + \dots = \exp iks_1 \cdot [1 + \exp ik\Delta + \exp ik2\Delta + \dots \exp ik(N-1)\Delta]$, pri čemer je $\Delta = a \sin \alpha$.

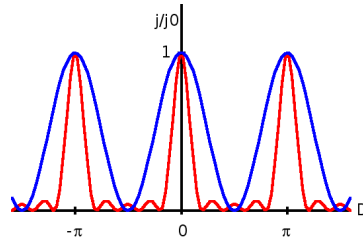


Slika 38.14 Uklon na mrežici tankih rež na medsebojni razdalji a . Ravno valovanje vpada na mrežico pod pravim kotom. Opazujemo uklonjeno valovanje daleč proč pod različnimi koti α .

Računamo takole. V oklepaju je geometrična vsota, ki znaša $(\exp ikN\Delta - 1)/(\exp ik\Delta - 1)$. Izračunamo $u_P u_P^*$, upoštevamo identiteto $\exp i\eta + \exp(-i\eta) = 2 \cos \eta$ ter $1 - \cos \eta = 2 \sin^2 \eta$ in dobimo $w \propto (\sin^{1/2} Nk\Delta)^2 / (\sin^{1/2} k\Delta)^2$. Limita $\sin N\eta / \sin \eta$, ko $\eta \rightarrow 0$, znaša N , zato lahko zapišemo

$$j(\alpha) = j_0 \left[\frac{\sin^{1/2} Nka \sin \alpha}{N \sin^{1/2} ka \sin \alpha} \right]^2. \quad (38.67)$$

S tem smo uklonjeni tok v smeri α normirali glede na uklonjeni tok pri $\alpha = 0$. Maksimumi ležijo tam, kjer $^{1/2}ka \sin \alpha = \pi a \sin \alpha / \lambda = 0, \pi, 2\pi \dots$, torej kjer $a \sin \alpha = n \cdot \lambda$, $n = 0, 1, 2 \dots$, kar že vemo.

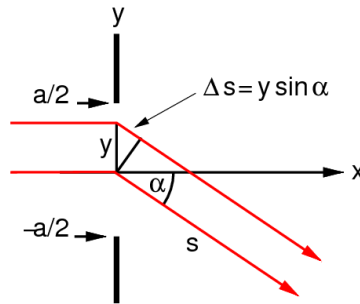


Slika 38.15 Uklon valovanja za mrežico iz dveh rež (modro) in iz petih rež (rdeče). Prikazana je relativna gostota toka v odvisnosti od parametra $D = \pi(a/\lambda) \sin \alpha$.

Če so reže zelo ozke, so vsi maksimumi enako močni. Lega maksimumov je neodvisna od števila rež N . So pa maksimumi tem ožji, čim več je rež. Med dvema sosednjima maksimumoma leži $N-2$ majhnih sekundarnih maksimumov.

Široka reža

Široko režo si mislimo sestavljeno iz samih ozkih rež, ki se med seboj stikajo. Izračunati moramo $u_P \propto \int dy \exp(ik(s + \Delta s(y)))$, pri čemer $\Delta s = y \sin \alpha$.



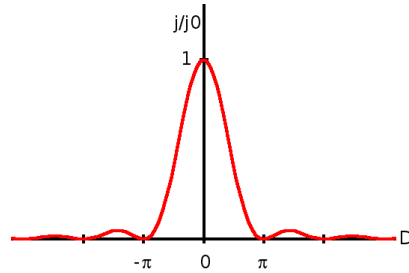
Slika 38.16 Uklon na široki reži z debelino a . Okoliščine so enake kot pri mrežici.

Računamo takole. Ker $\exp(iks)$ ni odvisen od y , ga izpustimo in preostane $\int dy \exp(iky \sin \alpha)$ v mejah $\mp a/2$. Diferencial zapišemo v obliki $(1/k \sin \alpha) d(ky \sin \alpha)$, s čimer preide integral v obliko $(1/k \sin \alpha) \int \exp(-i\eta) d\eta$ v mejah $\mp (a/2)k \sin \alpha$. Izračunamo $\int \exp(-i\eta) d\eta = i \exp(-i\eta)$, vstavimo meje, upoštevamo $(\exp(i\eta) - \exp(-i\eta))/2i = \sin \eta$ in dobimo $u_P \propto \sin(k \sin \alpha) / k \sin \alpha$.

Kvadriramo in upoštevamo, da $\sin \eta / \eta \rightarrow 1$, ko $\eta \rightarrow 0$, pa lahko zapišemo

$$j(\alpha) = j_0 \left[\frac{\sin(ka \sin \alpha)}{ka \sin \alpha} \right]^2. \quad (38.68)$$

Sorazmernostna konstanta j_0 je gostota toka na zaslonu pri uklonskem kotu $\alpha = 0$. Prvi minimum je pri $(2\pi/\lambda) a \sin \alpha = \pi$, torej pri $\sin \alpha \approx \alpha = 0,5 \cdot \lambda/a$. Za rdečo svetlobo in $1/4$ mm široko režo znaša $\alpha = 0,1^\circ$. Med obema prvima minimumoma je torej kot $0,2^\circ$. Na meter oddaljenem zaslonu to znaša okrog 3 mm.

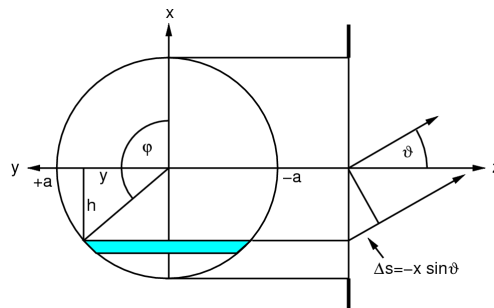


Slika 38.17 Uklon za široko režo. Prikazana je relativna gostota toka v odvisnosti od parametra $D = 2\pi (a/\lambda) \sin \alpha$.

Okrogla odprtina

Okroglo odprtino si mislimo razrezano v vodoravne in navpične trakove. Izračunati moramo $u_P \propto \int \exp(iks) dS = \int \exp(ik(s + \Delta s)) dS \propto \int \exp(ik\Delta s) dS$. Z upoštevanjem $\Delta s = -x \sin \theta$ je torej pred nami dvojni integral

$$u_P \propto \int_{-a}^{+a} dy \int_{-h(y)}^{+h(y)} dx e^{-ikx \sin \theta}. \quad (38.69)$$



Slika 38.18 Uklon za okroglo odprtino. Razmere so take, kot pri uklonu na široki reži.

Desni integral je enakega tipa kot pri reži in ga tako tudi izračunamo ter dobimo $u_P \propto (1/\sin \theta) \int_{-a}^{+a} dy \cdot \sin(k \sin \theta \cdot h(y))$. Upoštevamo $y = a \sin \varphi$, $h = a \cos \varphi$ in $dy = a \cos \varphi d\varphi$, s čimer dobimo

$$u_P \propto \frac{1}{\sin \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(ka \sin \theta \cdot \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (38.70)$$

Na prvi pogled integrala ne znamo izračunati. Lahko pa nanj pogledamo kot na funkcijo parametra $\eta = ka \sin \theta$. Definirajmo torej funkcijo J kot

$$J(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\eta \cdot \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (38.71)$$

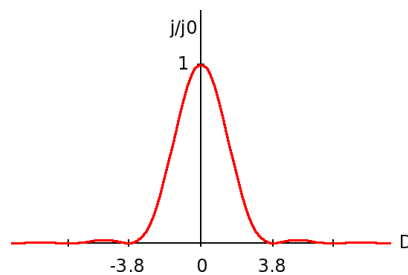
V definicijo smo zaradi lepšega vključili "normalizacijski" faktor $1/\pi$. — Ali lahko funkcijo J izračunamo? Podintegralsko funkcijo $\sin t$, $t = \eta \cos \varphi$ razvijemo v potenčno vrsto $t - t^3/3! + t^5/5! - \dots$ Tako pridelamo vsoto integralov oblike $\cos^{2n} \varphi$, ki jih znamo integrirati. Dobimo vrsto

$$J(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2n+1}. \quad (38.72)$$

To pa ni nič drugega kot že spoznana cilindrična funkcija J_1 (38.22)! S funkcijo J_1 zapišemo iskano amplitudo kot $u_P \propto J_1(ka \sin \theta)/\sin \theta$, jo kvadriramo, upoštevamo $J_1(\eta)/\eta \rightarrow 1/2$, ko $\eta \rightarrow 0$ (kar ugotovimo iz vrste), in končno pridelamo:

$$j(\theta) = j_0 \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2. \quad (38.73)$$

Sorazmernostna konstanta j_0 je gostota toka na zaslonu pri $\theta = 0$. Prvi minimum je pri $(2\pi/\lambda) a \sin \theta = 3,8$, torej pri $\sin \alpha \approx \alpha = 0,61\lambda/a = 1,22\lambda/2a$. Za rdečo svetlobo in $1/4$ mm široko luknjo znaša $\theta = 0,2^\circ$. Prvi minimalni obroč je torej napet na kot $0,4^\circ$. Na meter oddaljenem zaslonu to znaša okrog 6 mm. To je nekaj več kot pri enako široki reži.



Slika 38.19 Uklon za okroglo odprtino. Prikazana je relativna gostota toka v odvisnosti od parametra $D = 2\pi(a/\lambda) \sin \theta$.

Ko z daljnogledom opazujemo zvezdo, se njena svetloba uklanja na okroglem objektivu premera $2a$. V goriščni ravnini se tvori uklonska slika. Zvezda ni ostra, ampak razmazana v majhen disk. Če sta dve zvezdi blizu skupaj, se diska prekrivata in ju ne moremo razločevati. Najmanjša razdalja, ko ju še ločimo, je nekako tedaj, ko pade maksimum ene zvezde v prvi minimum druge. *Kotna ločljivost* daljnogleda je zato $1,22\lambda/2a \approx \lambda/2a$, kakor smo svoj čas že ugotovili eksperimentalno. $\square$