

37 Statična E & M polja

Električno polje – Pretok in cirkulacija – Električni potencial – Električni dipol – Polarizacija snovi – Magnetno polje – Pretok in cirkulacija – Magnetni potencial – Magnetni dipol – Magnetizacija snovi – Relativnost polj – Transformacija polj – Gibanje skozi polja

37.1 Električno polje

Poleg gravitacijskega polja, ki ga okrog sebe ustvarjajo vsa telesa, smo doslej spoznali še dve polji: električno, ki ga ustvarjajo nabiti delci (elektroni in ioni), in magnetno, ki ga ustvarjajo tokovi teh delcev. Kar smo spoznali, hočemo sedaj povzeti in razširiti v vektorski obliki.

Jakost polja Jakost električnega polja $\mathbf{E}$ v izbrani točki, recimo v bližini nabite kroglice ali v notranjosti ploščatega kondenzatorja, smo definirali (25.1) preko električne sile $\mathbf{F}_e$ na tamkajšnji testni delec z nabojem e :

$$\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}. \quad (37.1)$$

Smer polja je po dogovoru enaka smeri sile na pozitivni testni naboj. Poljsko jakost znamo izmeriti z vrtljivim influenčnim kondenzatorjem, priključenim na balistični galvanometer [25.3]. Lepo bi bilo, ko bi jo znali tudi izračunati, in sicer za vsakršno porazdelitev nabojev. Sledimo tej želji!

Polje točkastega naboja Najpreprostejše električno polje je tisto, ki ga okrog sebe ustvarja *točkast naboj*. Ne moremo si kaj, da ne bi pomislili na gravitacijsko polje, ki ga ustvarja masni delec (34.40). Morda je električno polje podobno, to je sorazmerno z nabojem in obratno sorazmerno s kvadratom oddaljenosti od njega? Torej:

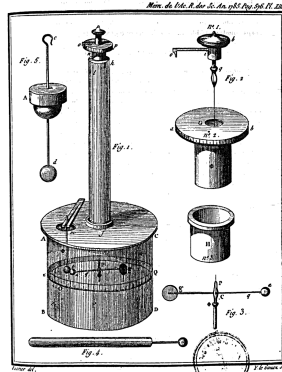
$$\mathbf{E}_P = \kappa_e \frac{e_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (37.2)$$

Oznaka $\mathbf{E}_P$ pomeni poljsko jakost v točki P. Ustvarja jo naboj e_Q , ki je v točki Q. Enotni vektor $\mathbf{n}_{QP}$ kaže iz točke Q v točko P. Razdalja med obema točkama znaša r_{QP} . Konstante κ_e zaenkrat ne moremo določiti.

Sila med dvema nabojema Ali je domneva pravilna? Na srečo imamo že orodje, s katerim jo lahko preverimo: torzijsko tehtnico, ki se je tako dobro obnesla pri merjenju gravitacijskih sil. Z njo hočemo izmeriti silo na točkast delec v polju drugega točkastega delca, to je, privlak/odboj med dvema točkastima nabojema.

Poskus poteka takole (COULOMB). Na svileno nit obesimo prečko iz izolatorja. Na koncu prečke je pritrjena prevodna kroglica. Dotaknemo se jo z enako, a naelektreno kroglico. Naboj se porazdeli polovično na obe kroglici, ki se odbijeta. Izmerimo zasuk prečke in s tem silo pri različnih razdaljah med obema

kroglicama (sila je sorazmerna z zasukom). Tako potrdimo odvisnost $F \propto 1/r^2$. Potem se naelektrene kroglice na prečki dotaknemo z enako veliko, a nevtralno, in tako razpolovimo naboj na prvi. Ponovimo meritev sile in potrdimo odvisnost $F \propto e$. Domneva glede sile in s tem poljske jakosti je torej potrjena.



Slika 37.1 Merjenje električne sile med dvema točkastima nabojema. Privlak ali odboj med dvema naelektrenima kroglicama zasuka prečko, obešeno na niti. Zasuk je sorazmeren s silo. Pokaže se, da je sila sorazmerna z nabojema in obratno sorazmerna z oddaljenostjo med njima. (Coulomb, 1785)

Superpozicija polj Električne sile – torej tudi polja – točkastih izvorov se vektorsko seštevajo:

$$\mathbf{E}_P = \kappa_e \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (37.3)$$

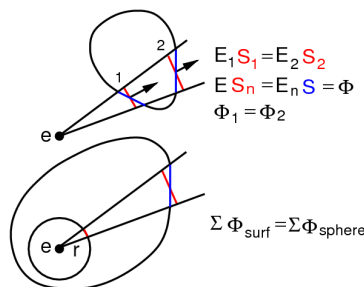
Če so naboji po prostoru porazdeljeni zvezno, jih opišemo z gostoto naboja $\rho = de/dV$ in vsota preide v integral

$$\mathbf{E}_P = \kappa_e \int \frac{\rho_Q dV_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (37.4)$$

Iz znane porazdelitve nabojev lahko torej vedno določimo, kakšno je polje. Izračunati moramo le ustrezno vsoto oziroma integral. Seveda moramo poznati konstanto κ_e ; to delo nas še čaka. Če je porazdelitev količakaj zamotana, pa hitro naletimo na računske težave.

37.2 Pretok in cirkulacija

Pretok polja V vsakem vektorskem polju lahko računamo pretoke skozi poljubne zamišljene ploskve. Kakšni so pretoki v električnem polju, to je električni pretoki?



Slika 37.2 Pretok električnega polja skozi sklenjeno ploskev je sorazmeren zaobjetemu neto naboju.

Zamislimo si ozek stožec z vrhom v točkastem naboju. Skozi izbrani pravokotni presek dS_n na razdalji r od vrha stožca znaša

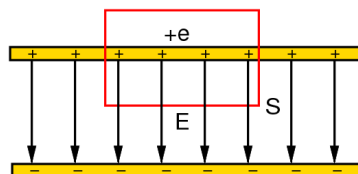
pretok polja $d\Phi = E dS_n$. Ker $E \propto 1/r^2$ in $dS_n \propto r^2$, je pretok polja enak skozi vsak presek stožca, ne glede na to, kako je oddaljen od vrha. Pretok skozi zaključeno ploskev, sestavljeno iz obeh pravokotnih presekov in iz vmesnega plašča stožca, je torej enak nič. — Pretok skozi poševni presek je enak pretoku skozi pravokotni presek, saj $E dS_n = E_n dS$. — Poljubno sklenjeno ploskev lahko prebodemo z množico sovrsnih stožcev. Pretok skozi vsak stožec je enak nič. Torej je tudi pretok skozi vsako zaključeno ploskev, ki ne vsebuje nobenih izvorov, enak nič. Kaj pa, če ploskev vsebuje izvore? Izvor zapremo v kroglo poljubno majhnega radija. Pretok skozi zunanjo ploskev je potem enak pretoku skozi notranjo kroglo: $\Phi = E 4\pi r^2$. Ker $E = \kappa_e e/r^2$, velja

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \kappa_e e. \quad (37.5)$$

Kaj pa, če sta prisotna dva izvora? Tedaj je pretok $\oint (E_{1n} + E_{2n}) dS = \oint E_{1n} dS + \oint E_{2n} dS$. Če je delec zunaj, nič ne prispeva k pretoku. Če je delec znotraj, pa ustrezno prispeva. Tako lahko izjavimo: pretok električnega polja skozi zaključeno ploskev je sorazmeren zaobjetemu neto naboju. To je *zakon o električnem pretoku* (GAUSS). Pravzaprav ni nič drugega kakor splošeno zapisan zakon o električni sili (37.2). Velja zato, ker električna sila pojema natanko s kvadratom razdalje.

Pretok v
kondenzatorju

Pa zaprimo eno ploščo ploščatega kondenzatorja v namišljen valj! Polje se pretaka pravokotno skozi notranjo ploskev S valja. Skozi zunanjo ploskev je pretok enak nič, ker je tam polje enako nič. Skozi plašč pa je pretok tudi nič, ker je tam polje vzporedno s ploskvijo. Zato dobimo $E = 4\pi \kappa_e e/S$.



Slika 37.3 Pretok skozi zaprt valj, ki objema eno ploščo v ploščatem kondenzatorju. K celotnemu pretoku prispeva le pretok skozi spodnjo ploskev valja.

Vemo pa, da za kondenzator velja $e/S = \epsilon_0 E$, zato

$$\kappa_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}. \quad (37.6)$$

S tem je konstanta κ_e določena preko električne konstante ϵ_0 in znaša $9,00 \cdot 10^9 \text{ Vs/Am}$. Pretok polja lahko zato zapišemo v lepši obliki, ki ne vsebuje več motečega faktorja 4π . Seveda pa pride ta faktor potem v nekatere druge enačbe. Velja torej

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\epsilon_0}. \quad (37.7)$$

Z besedami: pretok električnega polja skozi poljubno zaprto ploskev je sorazmeren z neto nabojem v njeni notranjosti. Slednji je lahko pozitiven ali negativen. V diferencialni obliki pa seveda zapišemo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (37.8)$$

Simetrična polja Zakon o električnem pretoku dobro služi za določanje električnih polj, kadar so ta lepo simetrična. — Enakomerno nabito neskončno ploščo zaobjamemo z valjem; polje teče pravokotno skozi obe osnovni ploskvi: $E = e/2S\epsilon_0 \propto (e/S)$. — Enakomerno nabito neskončno žico objamemo z valjem; polje teče pravokotno skozi plašč: $E = e/2\pi r l \epsilon_0 \propto (e/l)/r$. — Enakomerno nabito kroglo pa zaobjamemo s koncentrično kroglo; $E = e/4\pi r^2 \epsilon_0 \propto e/r^2$, kakor tudi mora biti. Vse te rezultate bi sicer lahko dobili z neposrednim superpozicijskim seštevanjem, vendar z mnogo več truda.

Cirkulacija polja Druga lastnost električnega polja, njegova cirkulacija, je enaka nič, saj nabiti delec, ki se giblje po sklenjeni krivulji, pri enem obhodu ne pridobi nobene energije. Če bi jo, bi bil to stroj za ustvarjanje energije iz nič. Torej:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (37.9)$$

Z besedami: cirkulacija po zaključeni zanki je enaka nič. To je *zakon o električni cirkulaciji*. V diferencialni obliki ga zapišemo

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (37.10)$$

Polje je torej brezvrtinčno. Enačbi za pretok (oziroma divergenco) polja in za cirkulacijo (oziroma rotor) polja sta osnova za študij statičnih električnih polj.

37.3 Električni potencial

Potencial polja Ker je polje $\mathbf{E}$ brezvrtinčno, ga lahko opišemo z gradientom potenciala/napetosti U (32.18):

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (37.11)$$

Negativni predznak pritaknemo, ker hočemo, da potencial pada v smeri sile na pozitivni naboj. V integralni obliki pa pišemo

$$U_B - U_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (37.12)$$

Potencial polja med točkama A in B je torej delo na enoto pozitivnega naboja, ki ga opravimo, ko – nasprotujoč sili polja – počasi prenesemo ta naboj po katerikoli poti od A v B. Delo je pozitivno, ko potiskamo naboj proti polju, in negativno, ko ga moramo zadrževati nazaj. Očitno je potencial nedoločen do aditivne konstante, to je $\nabla U = \nabla(U + \text{const})$. Drugače rečeno: vrednost potenciala v izhodiščni točki A lahko poljubno izberemo.

Ko smo šele odkrivali električne pojave, smo najprej kvantitativno vpeljali napetost in preko nje določali jakost polja. Sedaj, ko vemo več, pa smo postavili jakost polja na prvo mesto in z njo definirali

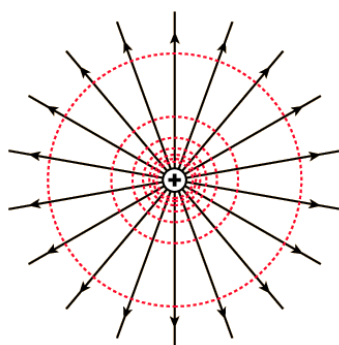
napetost. Seveda smo to naredili tako, da se novi postopek ujame s starim.

Potencial nabojev

Kakšen je potencial točkastega naboja, ki čepi v točki Q? Integriramo njegovo električno poljsko jakost (37.2) od neskončnosti do izbrane točke P in dobimo

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_Q}{r_{QP}}. \quad (37.13)$$

Potencial v neskončnosti postavimo na nič. To seveda lahko naredimo, saj s tem gradienta potenciala, ki določa električno polje, nič ne spremenimo. Ko se bližamo pozitivnemu naboju, narašča potencial proti $+\infty$. Ko se bližamo negativnemu naboju, pa potencial pada proti $-\infty$.



Slika 37.4 Potencial (pozitivnega) točkastega naboja. Ekvipotencialne ploskve so rdeče, nanje pravokotne silnice so črne. Potencial v neskončnosti je nič, nato narašča z bližanjem proti pozitivnemu naboju oziroma upada z bližanjem proti negativnemu naboju. (HyperPhysics)

Potencial več nabojev je kar vsota potencialov posamičnih nabojev:

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}} \quad (37.14)$$

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q dV_Q}{r_{QP}}.$$

Če moramo izračunati jakost polja iz dane porazdelitve nabojev, najprej izračunamo njihov potencial in nato, preko gradienta tega potenciala, iskano jakost polja. To je ponavadi lažje kot neposredna pot, saj moramo izračunati skalarni integral namesto vektorskega.

Potencialna enačba

Statično električno polje je povsem opisano z enačbama za divergenco in rotor polja. Lahko ga pa opišemo tudi preko potenciala. Jakost polja iz definicijske enačbe za potencial (37.11) vstavimo v divergenčno enačbo (37.8) in dobimo

$$\nabla^2 U = - \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (37.15)$$

To je *potencialna enačba*. Njene rešitve, če je podana porazdelitev nabojev po vsem prostoru, že poznamo; to so $U_P = \kappa_e \int \rho_Q dV_Q / r_{QP}$. Kadar v preučevanem delu prostora ni

nabojev, ampak so zgolj na njegovih robovih oziroma zunaj ter jih ne poznamo, pa moramo rešiti *homogeno potencialno enačbo*

$$\nabla^2 U = 0. \quad (37.16)$$

Rešiti zapisano enačbo v omejenem prostoru pomeni najti takšno polje U , ki bo zadoščalo enačbi in hkrati robnim vrednostim potenciala. Takoj vidimo, da imamo opravka s povsem enako enačbo, kot je enačba za prevajanje toplote v stacionarnih razmerah [36.13], $\nabla^2 T = 0$. Za ploščati, valjasti in krogelni kondenzator, ki imajo na "notranji" plošči potencial U_1 in med ploščama potencialno razliko ΔU , zato rešitve kar prepisemo: $U - U_1 \propto x$, $U - U_1 \propto \ln(\rho/\rho_1)$ in $U - U_1 \propto (1/r - 1/r_1)$.

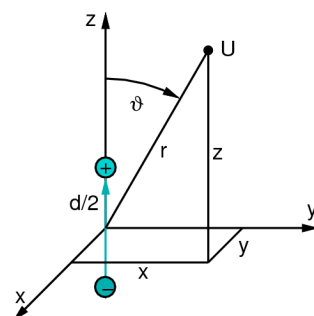
Sorazmernostne konstante smo izpustili. Gradienti potencialov povedo, kakšne so jakosti polj: $E_x = dU/dx = \text{const}$, $E_\rho = dU/d\rho \propto 1/\rho$ in $E_r = dU/dr \propto 1/r^2$, kakor tudi mora biti.

Potencial v prevodniku

Poseben primer predstavlja naelektren prevodnik. Vsi naboji so nakopičeni na njegovi površini, ker se pač medsebojno odbijajo. Potencial na površini je konstanten, saj bi sicer povzročal tokove. Ker v notranjosti ni nabojev, mora v katerikoli točki veljati $\nabla^2 U = 0$. Rešitev ne more imeti lokalnih ekstremov. Edina rešitev, ki ima stalno vrednost na robu in nima lokalnih ekstremov, je konstanta. Gradient konstantnega potenciala pa je nič. V notranjosti torej ni električnega polja.

37.4 Električni dipol

Atome si predstavljamo kot drobne kroglice, ki vsebujejo negativne in pozitivne naboje. Kakorkoli so ti že porazdeljeni, navzven je atom nevtralen. Ko pa atom zaide v zunanje električno polje, deluje na njegove pozitivne naboje sila v smeri polja, na negativne pa v nasprotni smeri. Težišči nabojev se zato razmakneta. Atom postane *električni dipol*. Podobno velja za molekule. Za nekatere izmed njih, recimo "nesimetrični" CO, moramo celo dopustiti, da so dipoli že brez vpliva zunanjega polja.



Slika 37.5 Električni dipol. Sestavljata ga dva razmaknjena, nasprotno enaka naboja.

Električni dipol

Preden se lotimo atomskih in molekulskih dipolov, moramo preučiti idealizirani dipol: dvojico nasprotno enakih točkastih nabojev e na medsebojni razdalji d .

Dipol naj bo usmerjen vzdolž osi z in naboja naj bosta oddaljena od izhodišča za $d/2$. Potencial dipola je potem $U = U_1 + U_2$, $U_1 = \kappa_e e / \sqrt{[(z - d/2)^2 + x^2 + y^2]}$, $U_2 = \kappa_e (-e) / \sqrt{[(z + d/2)^2 + x^2 + y^2]}$. Glejmo polje daleč proč. Potem lahko aproksimiramo $(z \pm d/2)^2 \approx z^2 \pm zd$. Upoštevamo še $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ in $z/r = \cos \theta$, pa dobimo po krajšem računu

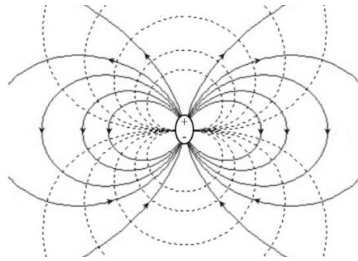
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ed \cos \theta}{r^2}. \quad (37.17)$$

Količina ed je očitno pomembna in zato jo poimenujemo *električni moment* dipola $p_e = ed$. Če definiramo $\mathbf{d}$ kot usmerjeno razdaljo d od $-e$ do $+e$, velja

$$\mathbf{p}_e = e\mathbf{d}. \quad (37.18)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}.$$

Vektorska oblika je veljavna za kakršnokoli lego in orientacijo dipola, če pod r razumemo oddaljenost od njega.



Slika 37.6 Polje električnega dipola. Ekvipotencialne ploskve so črtane in (nanje pravokotne) silnice so polne. (Anon)

Dipolni približek

Namesto dveh nasprotnoimenskih nabojev preučimo sedaj oblak nabojev, pozitivnih in negativnih, nakopičenih okrog koordinatnega izhodišča. Oblak naj vsebuje enako mnogo pozitivnih in negativnih nabojev. Zanima nas potencial v točki $\mathbf{R}$ iz izhodišča; proti tej točki naj kaže enotni vektor $\mathbf{e}_R$. Označimo lokacijo i -tega naboja z $\mathbf{d}_i$ in oddaljenost od njega do opazovane točke z $\mathbf{r}_i$. Potem velja $U = \kappa_e \sum e_i / r_i$. Naj bo opazovana točka daleč proč. Potem velja $r_i = R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R$. Ob upoštevanju $d_i \ll R$ sledi $1/r_i = (1/R) \cdot (1 + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R / R)$, to je,

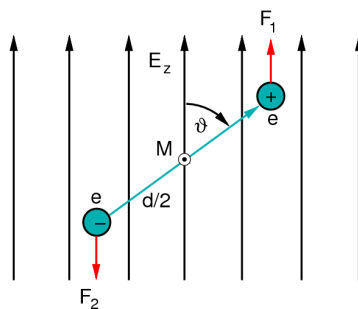
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (37.19)$$

$$\mathbf{p}_e = \sum e_i \mathbf{d}_i.$$

Vpeljali smo dipolni moment nevtralnega oblaka. Daleč proč od oblaka je polje (približno) dipolno.

Dipol v električnem polju

Če zaide dipol v električno polje, deluje na vsakega izmed njegovih dveh nabojev električna sila. V homogenem polju sta sili na posamičen naboj nasprotno enaki in celotna sila je zato nič. Vendar pa sili izvajata tudi navor in ta ni enak nič.

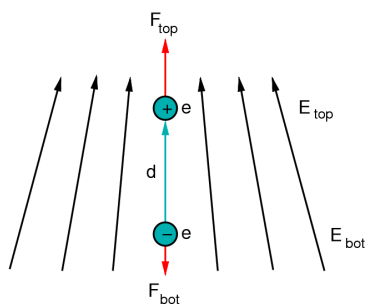


Slika 37.7 Na dipol v homogenem električnem polju deluje navor, ki ga poskuša usmeriti vzdolž silnic.

Naj bo dipol postavljen pravokotno na električne silnice. Potem čuti navor $M = 2 eE d/2 = p_e E$. Če je dipol glede na silnice odklonjen za kot θ , pa čuti navor $M = p_e E \sin \theta$. V vektorski obliki zapišemo

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E}. \quad (37.20)$$

Neto sila na dipol se pojavi le, če je polje nehomogeno. Tedaj sili na naboja nista nasprotno enaki. Naj ima polje navpični gradient $\partial E/\partial z$ in naj se dipol v njem usmeri navpično. Na zgornji naboj potem deluje sila eE_{top} navzgor in na spodnji naboj sila eE_{bot} navzdol. Razlika obeh sil znaša $F = e(E_{\text{top}} - E_{\text{bot}})$. Velja še $E_{\text{top}} = E_{\text{bot}} + (\partial E/\partial z)d$, zato $F = p_e \partial E/\partial z$. Sila deluje v smeri naraščanja polja.



Slika 37.8 Na dipol v nehomogenem električnem polju deluje sila, ki ga poskuša povleči v smeri močnejšega polja.

Če je dipol nagnjen glede na polje, pa moramo upoštevati ustrezne projekcije. Naj bo pri negativnem naboju jakost polja $\mathbf{E}$ in pri pozitivnem $\mathbf{E} + d\mathbf{E}$. Sila na dipol je potem $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + d\mathbf{E}) - e\mathbf{E} = ed\mathbf{E}$. Spomnimo se obrazca za smerni diferencial skalarne polja $dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)U$ in ga uporabimo za smerni diferencial vektorskega polja: $d\mathbf{E} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{E}$. Pomnožimo z e in dobimo

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_e \cdot \nabla)\mathbf{E}. \quad (37.21)$$

To je sila, s katero naelektrjen glavnik privlači k sebi koščke papirja, v katerih je induciral električne dipole.

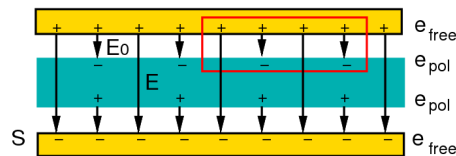
V stabilni ravnovesni legi je dipol orientiran v smeri električnih silnic. Ko ga zasukamo za kot φ , znaša velikost navora $M = p_e E \sin \varphi$. Pri tem opravimo delo $A = \int M d\varphi = -p_e E \cos \varphi + p_e E$. To delo lahko dipol vrne, zato z njim definiramo potencialno energijo dipola $\Delta W = A$ takole:

$$W = -\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}. \quad (37.22)$$

S to definicijo narašča energija od $-p_e E$ v stabilni legi do $+p_e E$ pri zasuku 180° .

37.5 Polarizacija snovi

Vemo, da se kapaciteta ploščatega kondenzatorja poveča, če vanj vstavimo dielektrično snov, na primer steklo (25.4). Faktor povečanja smo poimenovali dielektričnost snovi, ϵ . Povečanje kapacitete seveda pomeni, da se zmanjša napetost med ploščama. Ker je napetost krivuljni integral električne poljske jakosti, pa sklepamo, da se ta v dielektriku zmanjša, čeprav ostajajo naboji na ploščah nespremenjeni. Kako je to mogoče?



Slika 37.9 Polarizacija dielektrika v kondenzatorju. Homogeno električno polje influencira v snovi električne dipole. Zato se na zgornji in spodnji plošči pojavita nasprotno enaka vezana naboja. Polje v snovi je manjše kot polje v praznem kondenzatorju.

Homogena
polarizacija

Zamislimo si zaprto škatlo, ki objema mejo med ploščo in dielektrikom. Ker je električno polje v slednjem zmanjšano, sklepamo, da je neto naboj znotraj ploskve manjši, kot bi bil brez dielektrika. Sklep je samo eden: na površini dielektrika se je moralo pojaviti nekaj nasprotnih nabojev k tistim, ki so na plošči. Od kod so prišli? Iz atomov dielektrika. V teh atomih namreč razmakne zunanje električno polje težišči pozitivnega in negativnega naboja v smeri polja. Inducirani naboji se v notranjosti dielektrika izravnavajo (zaradi homogenosti polja), na površini pa ne in tam se pojavi vezan površinski naboj. Ta razredči obstoječi naboj na ploščah.

Naj dobi atom ali molekula električni moment $\mathbf{p}_e = e\mathbf{d}$. Vsoto momentov v prostorninski enoti poimenujemo *polarizacija snovi*:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}_e}{dV} = n e \mathbf{d}. \quad (37.23)$$

Zaradi polarizacije se na površini S nabere $e_{\text{pol}} = S n e d$ naboja oziroma njegova ploskovna gostota $\sigma_{\text{pol}} = P$. Pretok skozi obravnavano škatlo torej zapišemo $E = (\sigma_{\text{free}} - \sigma_{\text{pol}})/\epsilon_0$ oziroma $E = (\sigma_{\text{free}} - P)/\epsilon_0$.

Če polje ni premočno, predpostavimo sorazmernost

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (37.24)$$

Sorazmernostni faktor χ_e poimenujemo *električna susceptibilnost*. Potem znaša v dielektriku $E = \sigma_{\text{free}}/\epsilon_0(1 + \chi_e)$. S tem je določena tudi napetost med ploščama kondenzatorja

$U = El$ in njegova kapaciteta $C = \sigma_{\text{free}} S / U = (1 + \chi_e) \epsilon_0 S / l$. To pomeni, da

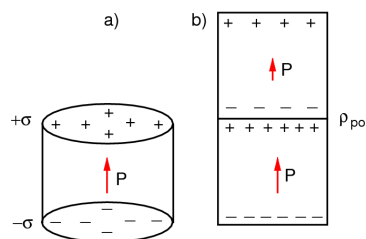
$$\epsilon = 1 + \chi_e. \quad (37.25)$$

Nehomogena polarizacija

Kaj pa, če polarizacija ni homogena? Naboj, ki se premakne skozi namišljeno majhno ploskev v dielektriku, je potem enak njeni ploščini krat normalni komponenti polarizacije, torej $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. Skozi zaprto ploskev vstopajo in izstopajo polarizacijski naboji. Znotraj ploskve se zato spremeni količina naboja za $\Delta e = -\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$. Spremembo naboja izrazimo kot $\Delta e = \int \rho_{\text{pol}} dV$. Izenačitev obeh izrazov pove $\int \rho_{\text{pol}} dV = -\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$. Ploščinski integral polarizacije izrazimo z prostorninskim integralom njene divergence, pa dobimo

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (37.26)$$

Tolikšna gostota polariziranega naboja se torej nabere v vsaki točki, kjer je divergenca polarizacije različna od nič. To so pravi naboji; polarizacijski naboji jim rečemo samo zato, da pojasnimo, kako so se tam znašli.



Slika 37.10 Vezani neto naboji. a) Homogeno polariziran valj. Na zgornji in spodnji ploskvi ima vezan naboj. b) Dva različno polarizirana valja drug vrh drugega. Na vmesni ploskvi obstaja vezani neto naboj.

Osnovne enačbe v dielektriku

Osnovni enačbi elektrostatične sta divergenčna in rotorska. V divergenčni enačbi $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ pomeni ρ gostoto vseh nabojev, prostih in polarizacijskih. Zapišimo $\rho = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$ in $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, pa dobimo

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}. \quad (37.27)$$

Upoštevajoč $\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$ se dobljena enačba poenostavi v

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}. \quad (37.28)$$

To je torej divergenčna enačba, ki velja v dielektrikih. Druga enačba, rotorska, pa seveda ostaja nespremenjena: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Na povsem enak način kot v praznem prostoru iz obeh enačb sledi

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla U) = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}. \quad (37.29)$$

Dielektričnost pustimo pod znakom odvajanja ter s tem upoštevamo, da se lahko v prostoru spreminja.

Merjenje susceptibilnosti

Kako pa merimo susceptibilnost oziroma permeabilnost dielektrikov in kakšne so številčne vrednosti? Permeabilnost merimo po definiciji: izmerimo kapaciteto ploščatega

kondenzatorja brez in z dielektrikom med ploščama. Razmerje kapacitet je enako permeabilnosti. S tem je določena tudi susceptibilnost. Zelo majhne spremembe kapacitete merimo z uporovnim mostičkom [24.10] (z dvema kondenzatorjema in dvema uporoma) in izmeničnim virom napetosti. Pokaže se naslednje.

Dielektriki so treh tipov. — V prvih je dielektričnost neodvisna od jakosti polja in specifična susceptibilnost χ_e/ρ se ne spreminja s temperaturo. Takšna sta, na primer, zrak ($\epsilon = 1,0005$) in tekoči kisik (1,5). Predstavljamo si, da so njihovi atomi/molekule nepolarni, to je, da nimajo stalnih električnih momentov. Zunanje polje momente šele ustvari. — Druga skupina ima tudi dielektričnost neodvisno od jakosti polja, njihova specifična susceptibilnost pa pada z naraščajočo temperaturo. Takšni so, na primer, vodna para pri 100 °C in 1 atm ($\epsilon = 1,006$), tekoča voda pri 20 °C (80) in led pri –20 °C (16). Predstavljamo si, da so te molekule polarne, to je, da imajo stalne električne dipole. Zunanje polje jih obrača v svojo smer. Čim višja je temperatura, tem težje jih polje "počeše". — Nazadnje obstaja še nekaj spojin, katerih permeabilnost je zelo visoka in niti približno konstantna. Z njimi se ne bomo ukvarjali.

Polje v rovu in reži

V snovi, postavljeni v zunanje električno polje, se preko influence dipolov vzpostavi notranje polje. Če je snov plinasta ali tekoča, je to polje neposredno dostopno meritvam. Če pa je snov trdna, moramo v njej izvrtati votlino, kjer želimo meriti. Vendar pa električna poljska jakost v tej votlini ni enaka tisti v snovi, in je celo odvisna od oblike votline. Posebno zanimiva sta dva mejna primera za votlino: prečna reža in vzdolžni rov. Pretočna enačba za eno ploskev reže pove, da je polje v reži večje od polja v snovi, in sicer je takšno, kot v kondenzatorju brez dielektrika: $E_{\text{slot}} = \epsilon E = E_0$. Cirkulacijska enačba za rob rova pa pove, da je polje v rovu enako polju v snovi $E_{\text{tunnel}} = E$.

37.6 Magnetno polje

Jakost polja

Jakost magnetnega polja B v izbrani točki prostora, recimo znotraj dolge tuljave s tokom, smo definirali (25.5) preko magnetne sile F_m na tamkajšnji testni tokovodnik Il . Vektorsko ponovimo:

$$\mathbf{F}_m = Il \times \mathbf{B}. \quad (37.30)$$

Magnetno poljsko jakost že znamo izmeriti z vrtljivo indukcijsko tuljavo in priključenim balističnim galvanometrom [25.6]. Lepo bi bilo, ko bi jo znali tudi izračunati, in sicer za vsakršno porazdelitev tokov po prostoru.

Polje tokovodnika

K jakosti polja v izbrani točki prispevajo vsi *tokovni elementi* v prostoru. Žal pa poskusov s posamičnimi tokovnimi elementi ne moremo delati. Tako tudi ne moremo neposredno izmeriti, kakšno

je njihovo polje. Vse, kar lahko storimo, je tole: predpostavimo, da je polje tokovnega elementa takšno ali drugačno ter da se posamična polja vektorsko seštevajo; izračunamo, kakšno bi morale biti potem polje nekaterih preprosto oblikovanih tokovodnikov, recimo dolge ravne žice ali krožne zanke; in preverimo s poskusom, ali je res tako.

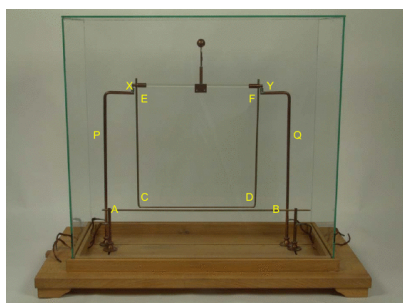
Prva misel, ki nas obide, je tale: če pojema električno polje s kvadratom oddaljenosti od točkastega izvora, pojema morda tudi magnetno polje tokovnega elementa na tak način; hkrati pa morda v izbrani smeri šteje zgolj pravokotna projekcija tokovnega elementa in ne celotni element. Poskusimo torej s predpostavko (BIOT/SAVART)

$$\mathbf{B}_P = \kappa_m \oint \frac{I d\mathbf{s}_Q \times \mathbf{n}_{QP}}{r_{QP}^2} . \quad (37.31)$$

Oznaka $\mathbf{B}_P$ pomeni poljsko jakost v točki P. Iz tokovnega elementa $I d\mathbf{s}_Q$, ki je v točki Q, je proti P usmerjen enotni vektor $\mathbf{n}_{QP}$. Razdalje med obema točkama je r_{QP} . Konstante κ_m zaenkrat ne moremo določiti.

Sila med vodnikoma

Ali je domneva pravilna? Izračunajmo, kakšno bi morale biti polje dolgega ravnega vodnika! Iz izbrane točke na oddaljenosti R od vodnika vidimo tokovne elemente pod različnimi koti φ in na različnih oddaljenostih r . Vidna dolžina (pravokotna projekcija) takega elementa znaša $ds = r d\varphi$ in $R = r \cos \varphi$, zato $\int ds/r^2 = 1/R$, torej $B = 2\kappa_m I/r$. Polje pojema obratno sorazmerno z oddaljenostjo od vodnika. Če torej drug ob drugega obesimo dva dolga vodoravna vodnika, bo eden drugega privlačeval s silo na dolžinsko enoto $F/l \propto I_1 I_2 / r$. To pa zlahka preverimo eksperimentalno in ugotovimo, da res drži (AMPERE).



Slika 37.11 Sila med dvema vodnikoma AB in CD. Prikazana je replika priprave, s katero je bil poskus prvič izveden. (Oldenburg Universität)

Začetna domneva o polju tokovnega elementa je zato podkrepljena in jo bomo do morebitnega preklica imeli za pravilno.

Polje tokov

Če tokovi niso tanki, marveč razmazani po prostoru, jih opišemo z gostoto tokov $\mathbf{j} = d\mathbf{I}/dS$. Magnetno polje, ki ga ustvarjajo, pa se zato zapiše v obliki

$$\mathbf{B}_P = \kappa_m \oint \frac{\mathbf{j}_Q \times \mathbf{n}_{QP}}{r_{QP}^2} dV_Q . \quad (37.32)$$

Kot vidimo, so enačbe za magnetno polje tokov presenetljivo podobne enačbam za električno polje nabojev.

37.7 Pretok in cirkulacija

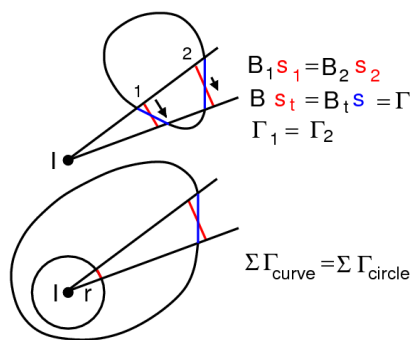
Pretok Slike magnetnih polj z opilki kažejo, da so magnetne silnice okrog tokov vedno sklenjene: nimajo ne izvorov ne ponorov. To nas navede na domnevo, da je pretok magnetnega polja skozi vsako zaprto ploskev enak nič. Postulirajmo torej *zakon o magnetnem pretoku*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (37.33)$$

oziroma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (37.34)$$

Cirkulacija Kaj pa cirkulacija polja? Lotimo se je po zgledu za pretok električnega polja!



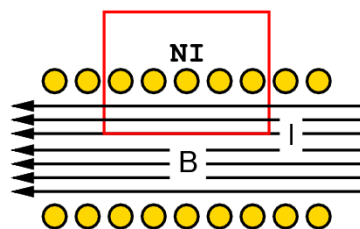
Slika 37.12 Cirkulacija magnetnega polja vzdolž sklenjene zanke je sorazmerna z objetim tokom.

Objemimo polje ravnega vodnika s krožno zanko polmera r ! Zanka naj leži pravokotno na vodnik. Cirkulacija po tej zanki znaša $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r = 2\kappa_m I \cdot 2\pi$. Ker $B \propto 1/r$, je prav takšna tudi cirkulacija po katerikoli drugi zanki, ki tok objema. Če je znotraj zanke več tokov, pa šteje njihova neto vsota. Navedene ugotovitve posplošimo v *zakon o magnetni cirkulaciji* (AMPERE):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi\kappa_m I. \quad (37.35)$$

Z besedami: cirkulacija magnetnega polja po zaključeni zanki je sorazmerna z neto tokom skozi njo. Ni treba, da je zanka ravninska, lahko je poljubno skrivenčena.

Cirkulacija v tuljavi Pa v dolgi tuljavi objemimo N navojev na dolžini l s pravokotno zanko!



Slika 37.13 Cirkulacija po zanki, ki objema navoje v dolgi tuljavi. K celotni cirkulaciji prispeva le notranja stranica.

Polje B znotraj tuljave je homogeno, zunaj pa enako nič, zato znaša cirkulacija po zanki $B \cdot l = 4\pi\kappa_m NI$. Vemo pa, da za tuljavo velja $B = \mu_0 NI/l$, iz česar sledi

$$\kappa_m = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (37.36)$$

S tem smo določili doslej nepoznano konstanto κ_m . Znaša $1,00 \cdot 10^{-7} \text{ Am/Vs}$. Zakon o magnetni cirkulaciji lahko zato zapišemo v lepši obliki

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (37.37)$$

oziroma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (37.38)$$

Zakon o magnetni cirkulaciji ima pri računanju magnetnih polj podobno vlogo kot zakon o električnem pretoku pri računanju električnih polj.

37.8 Magnetni potencial

Magnetni potencial

Divergenca rotorja poljubnega polja je enaka nič (32.19). To pomeni, da lahko jakost danega magnetnega polja $\mathbf{B}$ zapišemo kot rotor ustrezno izbranega *magnetnega potenciala* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (37.39)$$

Ker dobimo jakost polja z odvajanjem potenciala, je ta nedoločen do poljubne aditivne konstante. Vprašamo se lahko celo: če $\mathbf{A}$ določa $\mathbf{B}$ (preko svojega rotorja), ali še kakšen drugačen $\mathbf{A}'$ določa isti $\mathbf{B}$? Torej: kdaj velja $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$? Tedaj, ko $\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0$. Toda: če je rotor kakšnega vektorja enak nič, mora biti ta vektor gradient nekega skalarja: $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$. To pa pomeni, da je $\mathbf{A}$ nedoločen celo do aditivnega člena $\nabla \psi$.

Vektorska potencialna enačba

Jakost polja $\mathbf{B}$ je določena s tokovi, zato je tako tudi s potencialom. Kako je potencial potem odvisen od tokov? V rotorsko enačbo $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ vstavimo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ in dobimo $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$. Dvojni vektorski produkt znamo zapisati kot $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Postavimo še pogoj $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. S tem ne vplivamo na $\mathbf{B}$. (Ker $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$, lahko s primerno izbiro ψ napravimo kakršenkoli $\nabla \cdot \mathbf{A}'$.) Tako dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (37.40)$$

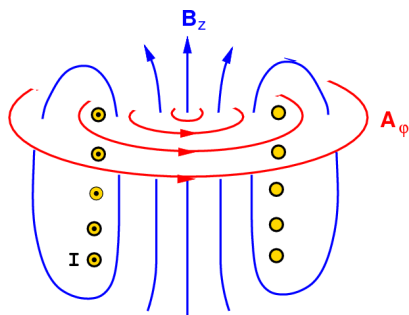
To je vektorska potencialna enačba, torej tri skalarne potencialne enačbe za tri komponente tokov. Vsaka od njih je formalno identična s potencialno enačbo za naboje. Torej poznamo tudi njeno rešitev:

$$\mathbf{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q dV_Q}{r_{QP}}. \quad (37.41)$$

Kadar v polju ni tokov, ampak so podane zgolj robne vrednosti potenciala, rešujemo enačbo $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$ na podoben način kot njeno skalarno vzornico.

Vzorčni potenciali

Zanimivo bi bilo videti, kakšni so potenciali nekaterih znanih magnetnih polj.

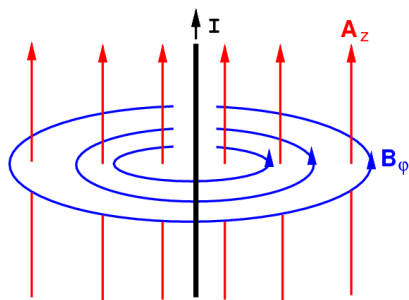


Slika 37.14 Magnetni potencial tuljave. Silnice polja so modre, tokovnice potenciala so rdeče. Obe polji sta osno simetrični.

Magnetna poljska jakost znotraj dolge tuljave premera R je konstantna in usmerjena vzdolž tuljave: $B_z = \mu_0 NI/l$. Rotor iskanega potenciala $\mathbf{A}$ ima torej le komponento $\text{rot}_z \mathbf{A} = B_z$. Tokovnice potenciala so zato koncentrični krogi. Komponento rotorja zapišemo v polarnih koordinatah kot $(1/r)(\partial r A_\phi / \partial r - \partial A_r / \partial \phi) = B_z$. Drugi člen je nič. Kakšen mora biti $A_\phi(r)$, da je enačba izpolnjena? Očitno $A_\phi = Kr$, kar vodi na $2K = B_z$ oziroma $K = \mu_0 NI/2l$. Velikost potenciala torej narašča linearno od osi proti ovojem.

Zunaj ovojev mora biti rotor v vsaki točki enak nič:

$(1/r)(\partial r A_\phi / \partial r) = 0$. To je res, če $A_\phi = K'/r$. Zaradi zveznosti mora veljati $K'/R = K/R$. Velikost potenciala torej pada obratno sorazmerno z oddaljenostjo od ovojev.



Slika 37.15 Magnetni potencial ravnega vodnika. Silnice polja so modre, tokovnice potenciala so rdeče. Obe polji sta osno simetrični.

Magnetno polje okrog dolgega ravnega vodnika ima koncentrične tokovnice: $B_\phi = \mu_0 I/2\pi r$. To pomeni, da ima rotor potenciala le tangентno komponento $\text{rot}_\phi \mathbf{A} = B_\phi(r)$. Tokovnice potenciala so ravne črte, vzporedne z vodnikom. Komponento rotorja zapišemo $\partial A_r / \partial z - \partial A_z / \partial r = B_\phi(r)$. Prvi člen je enak nič. Da bo enačba izpolnjena, mora veljati $A_z = -K \ln r$, iz česar sledi $K = \mu_0 I/2\pi$. Velikost potenciala pada sorazmerno z logaritmom oddaljenosti.

Magnetno polje opišemo bodisi z njegovo jakostjo $\mathbf{B}$ ali s potencialom $\mathbf{A}$. Kateri opis je "pravi"? Odgovor je odvisen od

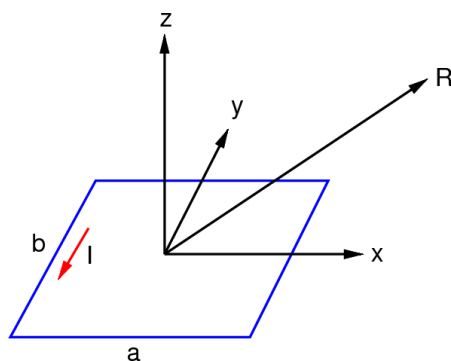
tega, kaj razumemo pod "pravi", in se zato z njim ne bomo ubadali.

37.9 Magnetni dipol

V atomih ujeti elektroni se – tako si predstavljamo – bolj ali manj gibljejo. Atomi torej niso zgolj skupki nabojev, ampak tudi drobni tokokrogi. Nekateri atomi, morda vsi, se zato vedejo kot drobceni magnetki s severnim in južnim polom. Rečemo, da so *magnetni dipoli*. Zaradi termičnega gibanja so dipoli usmerjeni v vse mogoče smeri. Če pa zaidejo v zunanje magnetno polje, se bolj ali manj usmerijo vzdolž njega. Dopustiti moramo, da velja podobno tudi za molekule.

Magnetni dipol

Preden se podrobneje lotimo atomarnih dipolov, moramo preučiti idealiziran magnetni dipol: pravokotno zanko s stranicama a in b , po kateri teče tok I . Zanko orientirajmo, kakor kaže slika.



Slika 37.16 Magnetni dipol. Utelesa ga pravokotna zanka, po kateri teče tok.

V smeri z ni tokov, zato $A_z = 0$. V smeri x sta dva toka j_x vzdolž dveh stranic a . Potencial A_x teh tokov je formalno enak kot potencial U dveh nabitih palic z nabojema ρ . Palici imata nasprotno enak naboj. Pri velikih oddaljenostih zato ustvarjata dipolni potencial $U = \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^2$. Dipolni moment je naboj na eni palici krat razmik med njima, torej $p_e = \lambda ab$. Z λ smo označili naboj na dolžinsko enoto, to je linearno gostoto naboja. Kosinus kota med $\mathbf{r}$ in $\mathbf{e}_r$ znaša $-y/r$. Tako zapišemo

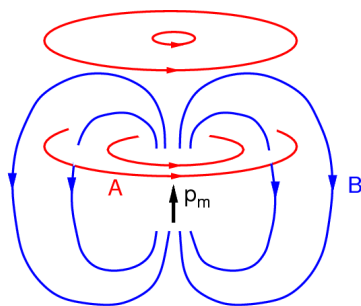
$U = -(\lambda ab / 4\pi\epsilon_0 r^2)(y/r)$. Ko nadomestimo λ z $I\mu_0\epsilon_0$, preide U v A_x :

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Iab}{r^2} \frac{y}{r}. \quad (37.42)$$

Na enak način dobimo

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Iab}{r^2} \frac{x}{r}. \quad (37.43)$$

Tokovnice vektorskega potenciala (pri velikih razdaljah) torej potekajo v krogih okrog osi z v isti smeri kot tok po zanki.



Slika 37.17 Magnetni potencial dipola. Silnice polja so modre, tokovnice potenciala so rdeče. Obe polji sta osno simetrični.

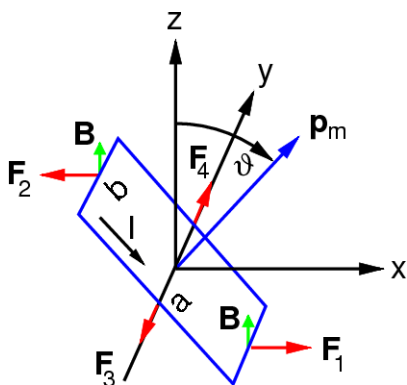
Magnetni moment Velikost potenciala je sorazmerna z Iab , to je, z *magnetnim momentom* $p_m = Iab = IS$. Če proglasimo magnetni moment za vektor, ki je normalen na zanko, pa lahko zapišemo magnetni potencial v vektorski obliki:

$$\mathbf{p}_m = IS \quad (37.44)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{e}_r}{r^2}.$$

Zapisana enačba velja za zanko poljubne oblike, saj si jo lahko mislimo sestavljeno iz samih pravokotnih zank.

Dipol v magnetnem polju Ko je magnetni dipol postavljen v magnetno polje, čuti navor in če je polje nehomogeno, še silo. V homogenem polju so razmere naslednje.

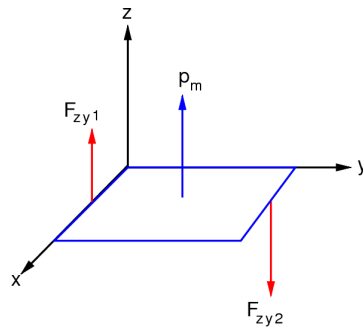


Slika 37.18 Navor na magnetni dipol v homogenem polju. Magnetno polje poskuša zvrtni dipol v smer silnic.

Na vsako stranico b deluje magnetna sila $F = IbB$ z ročico $(a/2) \sin \theta$. Navor obeh sil torej znaša $M = 2 \cdot IbB(a/2) \sin \theta = p_m B \sin \theta$. Vektorsko zapišemo

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (37.45)$$

V nehomogenem polju pa so razmere takšne.



Slika 37.19 Sila na magnetni dipol v nehomogenem polju. Magnetno polje poskuša potegniti dipol v smeri gradienta silnic.

Magnetni moment naj bo usmerjen vzdolž osi z . Da bomo splošni kljub posebni orientaciji dipola, naj bo magnetno polje usmerjeno poljubno. — Vzdolž osi z deluje neto sila $F_{zy1} - F_{zy2} = Idx(-\Delta B) = -I dx dy \partial B_y / \partial y = -IS \partial B_y / \partial y$. — Podobno velja za neto silo preostalih dveh stranic: $F_{zx1} - F_{zx2} = -IS \partial B_x / \partial x$. — Obe neto sili seštejemo in dobimo $F_z = -p_m(\partial B_y / \partial y + \partial B_x / \partial x)$. Ker je divergenca polja enaka nič, mora biti izraz v oklepaju enak $-\partial B_z / \partial z$, torej $F_z = p_m \partial B_z / \partial z$. — Podobno velja za neto sili vzdolž preostalih dveh komponent: $F_x = p_m \partial B_x / \partial x$ in $F_y = p_m \partial B_y / \partial y$. — Vse tri komponente zapišemo v obliki $\mathbf{F} = p_m \cdot \nabla \mathbf{B} = \nabla(p_m \mathbf{B})$. Ta enačba seveda velja za izbrani koordinatni sistem, ko je moment usmerjen vzdolž osi z . Kar zares šteje, je kot med magnetnim momentom in gradientom polja. V poljubno zasukanem koordinatnem sistemi zato zapišemo

$$\mathbf{F} = \nabla(p_m \cdot \mathbf{B}) = (p_m \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (37.46)$$

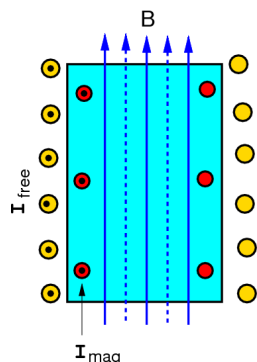
V stabilni ravnovesni legi je dipol orientiran v smeri magnetnih silnic. Ko ga zasukamo za kot φ , je velikost navora $M = p_m B \sin \varphi$. Pri tem opravimo delo $A = \int M d\varphi = -p_m B \cos \varphi - p_m B$. To delo lahko dipol vrne, zato z njim definiramo potencialno energijo dipola

$$W = -p_m \cdot \mathbf{B}. \quad (37.47)$$

S to definicijo narašča energija od $-p_m B$ v stabilni legi do $+p_m B$ pri zasuku za 180° .

37.10 Magnetizacija snovi

Vemo, da se magnetno polje tuljave močno okrepi, če vanjo vstavimo železen valj [25.7]. Sklepamo, da so se na površini valja pojavili dodatni tokovi, ki tečejo okrog valja prav tako kot prosti tokovi po ovojih. Od kod so prišli? Kaže, da so atomi železa majhni tokokrogi, ki imajo svoje magnetne momente. Ti so usmerjeni v različne smeri. Ko pride železo v magnetno polje, pa se dipoli bolj ali manj usmerijo vzdolž njega. V notranjosti železa se drobni krožni tokovi med seboj izravnavajo, na površini pa ne in tam se pojavijo vezani površinski tokovi. Ti okrepijo že obstoječe proste tokove in s tem magnetno polje v notranjosti tuljave. Domnevamo, da se tudi v drugih snoveh pojavljajo magnetni dipoli, čeravno mnogo šibkejši.



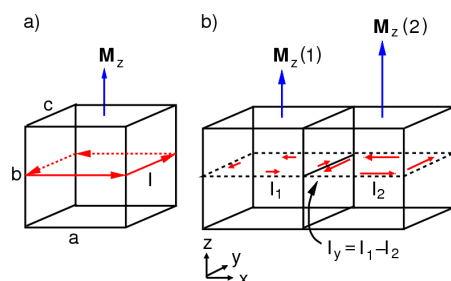
Slika 37.20 Magnetizacija snovi v tuljavi. Homogeno magnetno polje (polne silnice) inducira v snovi atomarne tokovne zanke – magnetne dipole. Zato se na površini snovi pojavijo vezani tokovi in se obdajo z dodatnim magnetnim poljem (črtane silnice). Polje v snovi je zato večje kot v prazni tuljavi.

Homogena magnetizacija

Vsoto atomarnih magnetnih momentov $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$ na prostorninske enoto poimenujemo *magnetizacija snovi*:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{p}_m}{dV} = nI\mathbf{S}. \quad (37.48)$$

Zaradi magnetizacije se po plašču valja pojavi tok $I_{\text{mag}} = nVI = Ml$, torej njegova linearna gostota $I_{\text{mag}}/l = M$.



Slika 37.21 Vezani neto tokovi. a) Homogeno magnetiziran kvader. Po plašču tečejo vezani tokovi. b) Dva različno magnetizirana kvadra drug ob drugem. Po vmesni ploskvi teče vezani neto tok.

Nehomogena magnetizacija

Če magnetizacija ni homogena, pa razdelimo snov na majhne kocke. Tokovi po njihovih stičnih ploskvah se ne izravnavajo več. Pogledajmo navpično vmesno ploskev dveh kock! — Iz slike razberemo neto vmesni tok $I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z)b = -\Delta M_z b = -(\partial M_z / \partial x)ab$. To pomeni, da $j_y = I/ab = -\partial M_z / \partial x$. — Obstaja pa še en prispevek k j_x , namreč sprememba M_x vzdolž z . Pogledamo vodoravno vmesno ploskev med dvema kockama in zanj na podoben način ugotovimo $j_x = \partial M_x / \partial z$. — Oboje skupaj torej da $j_x = \partial M_z / \partial x - \partial M_x / \partial z$. To pa je komponenta rotorja magnetizacije v smeri osi x , zato zapišemo vektorsko:

$$\mathbf{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (37.49)$$

Tolikšni tokovi se pojavijo v snovi, kjer je rotor magnetizacije različen od nič. To so pravi tokovi; magnetni jim rečemo samo zato, da pojasnimo, kako so nastali.

Osnovne enačbe v snovi

V rotorski enačbi $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ pomeni $\mathbf{j}$ vse tokove, tako proste kot magnetizacijske. Upoštevajmo $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{free}} + \mathbf{j}_{\text{mag}}$ in $\mathbf{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$, pa dobimo

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}}. \quad (37.50)$$

Postavimo, da je magnetizacija sorazmerna z magnetnim poljem, in raziščimo posledice:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}. \quad (37.51)$$

Sorazmernostni koeficient poimenujemo *magnetna susceptibilnost*. Potem se rotorska enačba zapiše v obliki $\nabla \times [(1 - \chi_m)\mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}}$. Integralna oblika te enačbe, uporabljena na dolgi tuljavi, pove $(1 - \chi_m)Bl = \mu_0 NI$, torej $B = \mu_0 NI / l(1 - \chi_m)$. Vemo pa že, da za snov v tuljavi velja $B = \mu \mu_0 NI / l$. Primerjava obeh enačb izda

$$\frac{1}{\mu} = 1 - \chi_m. \quad (37.52)$$

Za susceptibilnosti, ki so po velikosti mnogo manjše od 1, velja $\mu = 1 + \chi_m$. Rotorska enačba v (predpostavljeni linearni) snovi se zapiše kot

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}}. \quad (37.53)$$

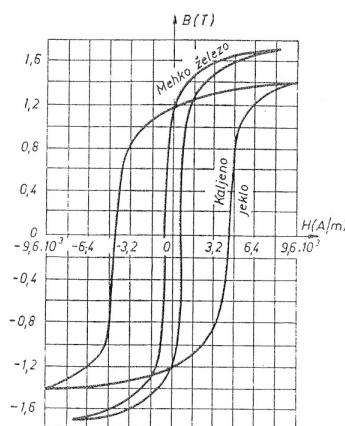
Merjenje
susceptibilnosti

Kakšne pa so, s številkami, susceptibilnosti oziroma permeabilnosti raznih snovi in ali so magnetizacije res sorazmerne s polji? To ugotavljamo z merjenjem sile na vzorec snovi v znanem nehomogenem magnetnem polju. Pripravimo si močno tuljavo in izmerimo, na standarden način (z indukcijsko tuljavico), jakost in gradient polja ob ustju. Oboje lahko tudi izračunamo. Primerna je tuljava z dolžino 1 čevljev, zunanjim premerom 1 čevljev, notranjim premerom 1/3 čevlja, napajana z močjo nekaj sto kilowattov in hlajena s sto litri vode na minuto. To je že kar resna naprava. Takšna tuljava ima ob ustju jakost polja $\sim 1 \text{ Vs/m}^2$ in gradient $\sim 10 \text{ Vs/m}^2\text{m}$. Potem tja obesimo vzorec snovi na občutljivi tehtnici ter izmerimo silo nanj: $F = p_m \partial B / \partial z$. Tipična sila na gramski vzorec snovi znaša nekaj milipondov. Iz sile in gradienta polja izračunamo magnetni moment p_m , ga delimo s prostornino vzorca V in dobimo magnetizacijo M . Iz enačbe $M = (\chi_m / \mu_0) B$ nato izračunamo susceptibilnost in s tem tudi permeabilnost.

Paramagnetne in
diamagnetne snovi

Pokaže se naslednje. Z izjemo železa, niklja in še nekaterih *feromagnetnih* snovi je magnetna permeabilnost vseh snovi zelo blizu 1. Od nje se razlikuje tipično za $\pm 10^{-5}$. Nekatere snovi imajo permeabilnost večjo od 1, to je, imajo pozitivno susceptibilnost; takšen je, na primer aluminij. Poimenujemo jih *paramagnetne*. Druge snovi pa imajo permeabilnost manjšo od 1, to je, imajo negativno susceptibilnost; primer je baker. Poimenujemo jih *diamagnetne*. Da je susceptibilnost snovi lahko negativna, je posebej presenetljivo: v takšni snovi se magnetni dipoli postavljajo proti smeri magnetnega polja. Zakaj je vse tako, kot je, ne moremo vedeti, ne da bi prej podrobneje raziskali gibanje nabojev v atomih. To nas še čaka.

Nekaj posebnega je železo in njegovi podobniki. Opisana merilna tuljava deluje na gramski vzorec železa s silo nekaj sto pondov! Zaradi tako močnih učinkov se lahko meritev magnetnih lastnosti feromagnetikov lotimo na bolj udoben način. Primeren je torus iz preučevane snovi. Na nasprotnih straneh sta naviti dve tuljavi; ena je preko ampermetra priključena na vir toka, druga pa na balistični voltmeter. Po korakih povečujemo tok in vsakokrat iz inducirane sanka napetosti izračunamo zvečanje magnetnega polja. Tako dobimo tabelo B proti I . Cirkulacija po zanki naokrog po torusu pove $(B - M\mu_0) = \mu_0 NI/l$. Če narišemo graf B proti NI/l , lahko za vsako točko grafa izračunamo tamkajšnjo magnetizacijo M in iz nje susceptibilnost ter permeabilnost.



Slika 37.22 Histereza mehkega železa in kaljenega jekla. Prikazana je odvisnost notranjega polja B v odvisnosti od zunanjega toka $NI/l \equiv H$. (Koškin, 1988)

V narisanim grafu opazimo naslednje. Z naraščanjem zunanjega magnetilnega toka $H = NI/l$ narašča tudi notranje magnetno polje B . Naraščanje je nelinearno in se približuje konstantni nasičeni vrednosti $B_{\max}$. Ko nato zmanjšujemo tok H nazaj proti nič, se polje B tudi zmanjšuje, vendar pri $H = 0$ preostane še nekaj polja. To je "remanentno" polje B_{rem} . Da polje zbijemo na nič, je potreben obraten "koercitivni" tok H_{coerc} . Z naraščanjem in nato z manjšanjem obratnega toka se ustrezno jača in slabi obratno magnetno polje in zgodba se ponovi. Jakost polja torej ni enolična funkcija zunanjih tokov, marveč je odvisna tudi od zgodovine polja. Rečemo, da ima polje *histerezo*. Za mehko železo izmerimo $B_{\text{rem}} = 1,2 \text{ Vs/m}^2$ in $H_{\text{coerc}} = 500 \text{ A/m}$. Remanentno polje v železu ostane, ko izključimo magnetilni tok. Jeklo ima približno takšno remanenco kot mehko železo in tisočkrat večjo koercitivnost. Namagneteno jeklo je torej mnogo težje razmagnetiti in je zato primerno za stalne magnete.

V snovi, postavljeni v zunanje magnetno polje, se preko indukcije dipolov vzpostavi notranje polje. Če je snov plinasta ali tekoča, je to polje neposredno dostopno meritvam. Če pa je snov trdna, moramo v njej izvrtati votlino, kjer želimo meriti. Vendar pa magnetna poljska jakost v tej votlini ni enaka tisti v snovi, in je celo odvisna od oblike votline. Posebno zanimiva sta dva mejna

primera za votlino: prečna reža in vzdolžni rov. Pretočna enačba za eno ploskev reže pove, da je polje v reži enako polju v snovi: $B_{\text{slot}} = B$. Cirkulacijska enačba za rob rova pa pove, da je polje v rovu manjše od polja v snovi in sicer je takšno, kot je v prazni tuljavi: $B_{\text{tunnel}} = \mu B = B_0$.

37.11 Relativnost polj

Ko smo rekli, da je magnetna sila na naboj sorazmerna z njegovo hitrostjo, smo molče privzeli, da to hitrost merimo relativno na tokovodnike, ki magnetno polje ustvarjajo. Kaj pa, če hitrost merimo glede na kakšen drug referentni sistem?

Žica s tokom Poglejmo dolgo ravno žico, ki miruje v laboratorijskem sistemu S. Po žici naj tečejo v desno elektroni z linearno gostoto naboja λ in s hitrostjo v glede na S. Ozadje toku tvorijo pozitivni ioni, tudi z linearno gostoto λ ; žica je navzven nevtralna. Tok v žici znaša $I = \lambda v$. Zunaj žice, na razdalji r od nje, je pozitiven testni naboj e , ki se giblje v isto smer in z natanko isto hitrostjo, kot elektroni v žici. Kakšno silo čuti ta naboj?

Žica je nevtralna, zato naboj ne čuti električne sile. Ker pa se giblje, čuti magnetno silo $F_m = evB$ proč od žice. Ker $B = \mu_0 I / 2\pi r$, znaša ta sila $F_m = e\mu_0 \lambda v^2 / 2\pi r$. Testni naboj se zato pospeši proč od žice.

Pa pogledajmo na isto žico iz koordinatnega sistema S', v katerem elektroni (in testni naboj na začetku) mirujejo. V tem sistemu se ionsko ozadje giblje s hitrostjo v proti levi. Ker je testni naboj v S' pri miru, ne more čutiti nobene magnetne sile. Zdi se tudi, da ne more čutiti nobene električne sile, saj imajo negativni in pozitivni naboji v žici (v sistemu S) enako gostoto. Torej se testni naboj sploh ne bi smel pospešiti od žice, kar je seveda skregano z realnostjo. Kje smo zašli?

Relativnost gostote nabojev

V sistemu S sta gostoti pozitivnega in negativnega naboja res popolnoma enaki, sicer bi se pojavilo električno polje, ki pa ga bi mobilni elektroni hitro nevtralizirali. V sistemu S' pa se ioni gibljejo s hitrostjo v in relativistično skrajšanje dolžin jim poveča gostoto na $\lambda / \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \lambda + \lambda v^2 / 2c^2$. Elektroni pa so pri miru, zato je njihova gostota manjša kot v S za $\lambda v^2 / 2c^2$. To pomeni, da ima žica, opazovana iz S', neto gostoto naboja $\lambda v^2 / c^2$. Okrog sebe zato ustvarja električno polje $E = (\lambda v^2 / c^2) / 2\pi\epsilon_0 r$. Testni naboj čuti silo $F_e = eE$, ki je (ko vstavimo E) natanko enaka sili F_m .

Čisto magnetna sila v S je enaka čisto električni sili v S', vsaj za neprevelike hitrosti! Opazovalca v obeh sistemih torej vidita enak pospešek testnega naboja, le da ga eden pripiše magnetni, drugi pa električni sili. Električne in magnetne sile – ter zato tudi električna in magnetna polja – niso nekaj absolutnega, ampak so odvisne od tega, iz katerega opazovalnega sistema opazujemo.

Transformacija izvorov
polj

Kakšna pa je transformacija nabojev in tokov, ko sedlamo iz enega opazovalnega sistema v drugega? Videli smo, da če je gostota nabojev v njihovem lastnem sistemu (kjer mirujejo) enaka ρ_0 , potem je v sistemu, ki se giblje s hitrostjo v , gostota povečana: $\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. V tem sistemu je gostota toka $j = \rho v = \rho_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Spomnimo pa se tudi, da sta energija E in gibalna količina $\mathbf{G}$ delca, ki se giblje s hitrostjo v , naslednja: $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ in $\mathbf{G} = m\mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Količini ρ in $\mathbf{j}$ sta torej odvisni od hitrosti v natanko tako, kot količini E in $\mathbf{G}$. Iz tega sklepamo, da se četverica količin ρ in $\mathbf{j}$ transformira prav tako kot četverica E in $\mathbf{G}$, to je, prav tako kot četverica t in $\mathbf{r}$ (EINSTEIN):

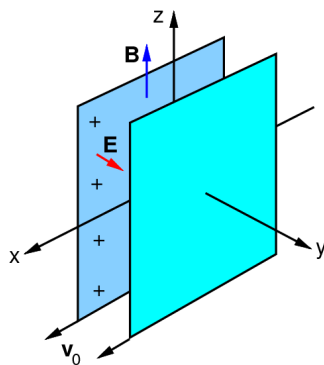
$$\begin{aligned} j'_x &= \gamma(j_x - u\rho) \\ j'_y &= j_y \\ j'_z &= j_z \\ \rho' &= \gamma(\rho - uj_x/c^2). \end{aligned} \quad (37.54)$$

V kateremkoli opazovalnem sistemu že opazujemo naboje in tokove, vedno veljajo zanje iste osnovne enačbe elektrodinamike. Gibanje delcev, ki ga z njimi izračunamo, bo vedno enako.

37.12 Transformacija polj

Opazovalni sistem

Zamislimo si, da sedimo na ravni cesti in gledamo vzdolž nje (os x). Ob straneh sta dva navpična zidova, ki polzita vzdolž ceste s hitrostjo v_0 . Zidova sta nasprotno enako naelektrena: desni pozitivno in levi negativno. V lastnem opazovalnem sistemu nabojev, torej v sistemu, povezanem z zidom, je ploskovna gostota nabojev σ_0 . Ker nas obdajajo naboji in tokovi, čutimo električno in magnetno polje. Cesta je opazovalni sistem S .



Slika 37.23 Transformacija polj. Nasprotno nabiti navpični plošči se gibljeta vzdolž osi x . Mirujoč opazovalec zaznava električno in magnetno polje E_y in B_z . Gibajoč se opazovalec pa zaznava drugačni polji E'_y in B'_z .

V S je zaradi relativističnega skrčenja gostota nabojev večja: $\sigma = \sigma_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$. Električno polje je homogeno in poteka od desne proti levi. Po zakonu o električnem pretoku velja $E_y = \sigma / \epsilon_0$ (1). Magnetno polje je homogeno in poteka navpično navzgor. Po zakonu o magnetni cirkulaciji velja $B_z = \mu_0 \sigma v_0$ (2).

Gibanje prečno na
polje

Po cesti pripelje tovornjak s hitrostjo v glede na cesto. Tovornjak je opazovalni sistem S' . Glede na tovornjak se zidova gibljeta s hitrostjo $v'_0 = (v_0 - v) / (1 + v_0 v / c^2)$ (3). Gostota nabojev na stenah je $\sigma' = \sigma_0 / \sqrt{1 - v'^2_0/c^2}$, torej $\sigma' = \sigma \sqrt{1 - v_0^2/c^2} / \sqrt{1 - v'^2_0/c^2}$.

Vstavimo v'_0 iz (3) in dobimo $\sigma' = \sigma(1 - v_0 v/c^2) / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (4). S tem pa tudi lahko izračunamo $E'_y = \sigma'/\epsilon_0$ in $B'_z = \mu_0 \sigma' v_0$ ter ob upoštevanju (1) in (2) dobimo

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - uB_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - uE_y/c^2). \end{aligned} \quad (37.55)$$

Namesto dveh navpičnih sten si zamislimo vodoravna tla in strop, torej namesto ploskev v ravnini xz ploskvi v ravnini xy . Razmišljanje je enako in rezultat naslednji:

$$\begin{aligned} E'_z &= \gamma(E_z + uB_y) \\ B'_y &= \gamma(B_y + uE_z/c^2). \end{aligned} \quad (37.56)$$

Gibanje vzdolž polja

Do zdaj se je tovornjak – gibajoči se opazovalec – premikal pravokotno na električno in magnetno polje. Ostane še premikanje vzporedno z njima. Za električno polje si zamislimo dve steni, pravokotni na cesti. Opazovalcu na tovornjaku, ki vozi od ene stene proti drugi, se njuna ploščina nič ne spremeni, razdalja med obema pa se skrajša. Ker je jakost električnega polja med stenama odvisna le od ploskovne gostote naboja in nič od vmesne razdalje, velja

$$E'_x = E_x. \quad (37.57)$$

Pogled na zapisane enačbe kar kliče po tem, da bi morale veljati še

$$B'_x = B_x. \quad (37.58)$$

Domnevo upravičimo takole. Zamislimo si, da poteka cesta po osi dolge tuljave s tokom. Vozniku se zdi tuljava krajša:

$l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$, to je, število ovojev na dolžinsko enoto, N/l' , je zanj večje. Magnetno polje bi moralo zato biti večje. Vendar pa je tok, ki ga voznik izmeri v ovajih, manjši od toka, ki ga izmeri cestar. Slednji namreč s stališča voznika uporablja uro, ki teče počasneje, zato isti pretočeni naboj preračunava na manj časovnih enot, torej meri večji tok. Velja $I' = de/dt' = (dt/dt')de/dt = (dt/dt')I = I/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. V produktu NI'/l' , s katerim je magnetno polje določeno, se obe spremembi izravnata.

Polja in izvori

Spremembe polj (37.55-58) (EINSTEIN) so lokalne. To pomeni, da so z vrednostmi $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$, ki ju opazimo v neki prostorsko časovni točki, enolično določene vrednosti $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ v kateremkoli drugem opazovalnem sistemu. Zato so transformacijske enačbe za polja, ki smo jih postavili s pomočjo posebno preprostih izvorov – ploščatega kondenzatorja in dolge tuljave, veljavne splošno. Tako se namreč transformirajo polja; izvori, ki ta polja povzročajo, so pri vsem skupaj nepomembni.

37.13 Gibanje skozi polja

Transformacijske enačbe za polja omogočajo, da izračunamo, kakšna polja vidimo, ko se gibljemo mimo poljubnih stalnih

nabojev in tokov. Dober primer je letalo, ki leti skozi zemeljsko električno in magnetno polje. Njegova hitrost naj bo zavidljivih $v = 300 \text{ m/s}$. Vendar je to je mnogo manj od svetlobne hitrosti, zato lahko v transformacijskih enačbah uporabimo približek $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + v^2/2c^2$, ki zneso za letalo $1 + 5 \cdot 10^{-13}$. Tipično električno polje je navpično, usmerjeno je proti tlorisu in ima jakost $\sim 100 \text{ V/m}$. Magnetno polje nad severnim polom je navpično, usmerjeno je proti nebu in ima jakost $\sim 10^{-5} \text{ Vs/m}^2$.

Prečenje električnega polja Privzemimo, da leti letalo le skozi navpično električno polje E_z . Leti naj vodoravno v poljubno smer (os x). Transformacijske enačbe povedo, da vidi pilot močnejše električno polje $E'_z = \gamma \cdot E_z$ in novonastalo magnetno polje $B'_y = \gamma \cdot v E_z / c^2$. Sprememba električnega polja za $5 \cdot 10^{-11} \text{ V/m}$ je nezaznavna. Nastalo magnetno polje pa znaša $3 \cdot 10^{-13} \text{ Vs/m}^2$, kar je tudi nezaznavno.

Prečenje magnetnega polja Naj leti letalo le skozi navpično magnetno polje B_z . Leti naj vodoravno v poljubno smer (os x). Transformacijske enačbe povedo, da vidi pilot močnejše magnetno polje $B'_z = \gamma B_z$ in novonastalo električno polje $E'_y = \gamma v B_z$. Sprememba magnetnega polja za $5 \cdot 10^{-13} \text{ Vs/m}^2$ je nezaznavna. Nastalo električno polje pa znaša $3 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$ in je na prvi pogled zlahka merljivo: z voltmetrom moramo le izmeriti potencialno razliko med koncema kril. V praksi tega žal ni mogoče narediti, ker se tudi voltmeter s priključki giblje skozi polje. Seveda pa to lahko naredimo (in smo že naredili) v laboratoriju s premikanjem prečke po tirnicah.

Nastanek prečnega električnega polja pri gibanju opazovalca skozi magnetno polje ni nič drugega kot relativistični opis za indukcijo napetosti pri gibanju vodnika: $E'_y = \gamma v B_z \rightarrow U_i = Bvl$. To kaže, da je magnetizem pravzaprav relativistični pojav. Dinamična indukcija pa je močna potrditev, da je teorija relativnosti pravilna. $\square$