

34 Dinamika

Delci – Sistemi delcev – Gibalna količina – Vrtilna količina – Kinetična energija – Gibanje togega telesa – Vrtenje okoli stalne osi – Premikanje osi vrtenja – Nihanje togih teles – Splošno nihanje teles – Gravitacijska konstanta – Gravitacijsko polje – Gibanje planetov

34.1 Delci

Premiki teles v prostoru so bili izhodišče za vpeljavo vektorjev in vodilo pri razvoju računanja z njimi. Zdaj, ko je vektorski račun zgrajen, postane močno orodje za opisovanje vsakršnega gibanja. Kar smo o gibanju že dognali in zapisali, hočemo zato povzeti v vektorski obliki. Študirali pa smo *točkasta telesa*, to je taka, ki so majhna v primerjavi z opravljenimi premiki.

Opis gibanja Gibanje točkastega telesa – delca – v vsakem trenutku opišemo z vektorjem lege glede na poljuben koordinatni sistem:

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \quad (34.1)$$

Ko se delec giblje, mu vektor lege vestno sledi. Je torej funkcija časa. Sprememba vektorja lege v kratki časovni enoti opisuje kratek premik:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{s} = (dx, dy, dz). \quad (34.2)$$

Z vektorjem premika sta določena vektor hitrosti \mathbf{v} in vektor pospeška \mathbf{a} :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = (v_x, v_y, v_z) \quad (34.3)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (a_x, a_y, a_z).$$

Premik $d\mathbf{s}$ je iz izbranega izhodišča (iz katerega raste enotni kazalec \mathbf{e}_r) viden kot zasuk za kot

$$d\varphi = \mathbf{e}_r \times \frac{d\mathbf{s}}{r}. \quad (34.4)$$

Z vektorjem zasuka sta določena vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ in vektor kotnega pospeška $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (34.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Dolžinske in kotne vektorske količine so med sabo povezane. Kratki računi pokažejo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\
\mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \\
\mathbf{a}_r &= -\omega^2 \mathbf{r} \\
\mathbf{a}^2 &= \mathbf{a}_t^2 + \mathbf{a}_r^2.
\end{aligned}
\tag{34.6}$$

Sile in gibanje Če okolica ne vpliva na delec, se ta giblje premo in enakomerno. Vpliv okolice - silo \mathbf{F} - postuliramo, kot znano (19.5), preko mase in pospeška delca :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$
(34.7)

Gibalni zakon množimo na obeh straneh s premikom $d\mathbf{s}$, upoštevamo $d\mathbf{v}/dt \cdot d\mathbf{s} = d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}/dt = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, integriramo in dobimo, kot znano (19.13), izrek o kinetični energiji:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2} = \Delta K.$$
(34.8)

Delo sile je enako spremembi kinetične energije. S tem smo povzeli vsa glavna dosedanja spoznanja o gibanju točkastih teles.

34.2 Sistemi delcev

Telesa okrog nas, gledana od blizu, pa niso točkasta, ampak so razsežna. Takšno razsežno telo si lahko predstavljamo kot *sistem delcev*, medsebojno povezanih s poljubnimi silami. Kamen, človeško telo, Zemlja in Osončje, vse to so sistemi delcev. Vsak delec v sistemu čuti sile od drugih notranjih delcev (*notranje sile*), pa tudi iz okolice (*zunanje sile*). Postuliramo, da sta sili med dvema delcema v sistemu nasprotno enaki in ležita na njuni zveznici. Tak sistem se pod vplivom zunanjih in notranjih sil ter pod vplivom zunanjih in notranjih navorov nekako giblje. Kaj lahko povemo o tem gibanju?

Met palice Ko vržemo palico v zrak, se sicer prekopicuje, vendar na nek način vendarle zarisuje parabolo, kakor to dela točkast kamen. Kaže, da se po paraboli giblje neka odlikovana točka palice, ki leži blizu njenega središča. Takoj pomislimo, da bi to lahko bilo težišče. Zaradi previdnosti pa tej točki recimo raje *masno središče*. Domnevamo, da mora za gibanje masnega središča palice veljati ista gibalna enačba, kot če bi bila vsa masa palice stisnjena vanj.



Slika 34.1 Skok z motornim kolesom. Odlikovana točka vozila in voznika - njuno masno središče - se giblje po paraboli. (Anon)

Masno središče Namesto palice si mislimo poljuben sistem delcev. Ni treba, da je tog. Na i -ti delec sistema deluje sila $\mathbf{F}_i = d^2(m_i \mathbf{r}_i) / dt^2$. Povzročajo jo notranji delci in okolica. Vsota sil na vse delce je $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = \sum d^2(m_i \mathbf{r}_i) / dt^2 = d^2(\sum m_i \mathbf{r}_i) / dt^2$. Ker se notranje sile med seboj paroma izničujajo, je to pravzaprav vsota vseh zunanjih sil. Enačbo lahko preoblikujemo v obliko

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2}, \quad (34.9)$$

pri čemer je $m = \sum m_i$ celotna masa sistema in \mathbf{r}^* lega masnega središča, ako vpeljemo

$$\mathbf{r}^* = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i. \quad (34.10)$$

To je torej lega masnega središča. Popolnoma in enolično je določena z legami in masami vseh delcev sistema. Masno središče lahko leži "znotraj" ali "zunaj" sistema. Giblje se s hitrostjo

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt}, \quad (34.11)$$

kakor pač velevajo zunanje sile. Kadar je vsota zunanjih sil enaka nič, se masno središče sistema giblje premo in enakomerno.

Težišče Ali masno središče res sovпада s težiščem? Telo, podprto v težišču, se ne vrta, ker je vsota navorov teže enaka nič. Za eno koordinato torej velja $0 = \sum m_i g \cdot x_i = g \sum m_i x_i$, pri čemer so x_i odmiki od težišča. Zato mora biti $\sum m_i x_i = 0$, torej $m x^* = 0$, torej $x^* = 0$. Masno središče je res tam, kjer je težišče. Če pa telo ni v homogenem težnem polju, tega ne moremo trditi. Zaradi kratkosti bomo v nadaljevanju govorili kar o težišču.

34.3 Gibalna količina

Gibalna količina Kadar je vsota zunanjih sil enaka nič, velja $\mathbf{v}^* = \text{const}$. Torej je tudi $m\mathbf{v}^* = \text{const}$ oziroma $\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$. Posamični delci se sicer gibljejo na različne načine, vendar se njihovo gibanje pokorava zapisani omejitvi. Kaže, da je produkt med maso in hitrostjo pomembna količina. Poimenujemo jo *gibalna količina* in definiramo

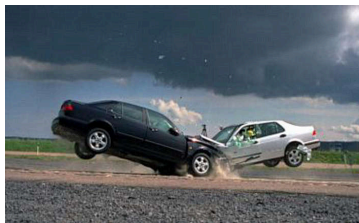
$$\mathbf{G} = m\mathbf{v}^* = \sum m_i \mathbf{v}_i. \quad (34.12)$$

Iz $\mathbf{F} = d^2(\sum m_i \mathbf{r}_i) / dt^2 = d(\sum m_i \mathbf{v}_i) / dt$ očitno sledi

$$\int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{G}. \quad (34.13)$$

To je izrek o gibalni količini (EULER). Če je sistem izoliran, torej če ni zunanjih sil, se njegova gibalna količina ohranja, sicer pa je njena sprememba enaka sunku zunanjih sil. Poglejmo nekaj primerov.

Trk dveh teles Dva avtomobila vozita drug proti drugemu in se čelno zaletita ter sprimeta. Kako se giblje sprijeta zveržena pločevina?



Slika 34.2 Trk dveh avtomobilov. Pri tem se ohranja gibalna količina. (Guardian)

Dvojica avtomobilov je sistem, na katerega ne delujejo zunanje sile (teža nima vpliva na vodoravno gibanje). Gibalna količina sistema se ohranja; po trku je enaka kot pred njim:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v. \quad (34.14)$$

Če sta avtomobila enako težka in se gibljeta z enakima hitrostima, po trčenju lepo obmirujeta. Sicer pa težje in/ali hitrejše vozilo potisne drugega nazaj. Dvakrat lažje vozilo mora imeti dvakrat večjo hitrost, da zaustavi nasprotnika.

Balistično nihalo Trk teles z znanimi masami ponuja dober način za merjenje njihovih hitrosti. Puškino ali revolversko kroglo mase m_1 in neznanne hitrosti v_1 izstrelimo v mirujočo težko klado mase m_2 , ki je obešena kot točkasto nihalo. Krogla obtiči v kladi. Gibalna količina se ohranja: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$. Klada se odmakne in zaniha. Njena hitrost skozi ravnovesje je, kot vemo [18.7], odvisna od amplitude nihanja: $v = x_0\sqrt{g/l}$. Izmerimo odmik x_0 in s tem je hitrost krogle enolično določena. Za tipične revolverje znaša okrog 300 m/s.

Potisna sila curka Z vodnim curkom iz gumijaste cevi zalivamo trato. Ko zadene curek na kakšno oviro, recimo na kamen, ga premakne. Očitno nanj deluje z neko silo. S kakšno silo deluje vodni curek na ravno oviro pri pravokotnem vpadu? V času dt vpade na oviro masa $dm = \rho Sv dt = \Phi_m dt$ vode. To je naš sistem. Temu sistemu se spremeni hitrost od v na nič, torej gibalna količina za $dG = -v dm$. Sprememba gibalne količine na enoto časa pa je sila, s katero deluje ovira na curek, torej tudi sila, s katero deluje curek na oviro:

$$F = \Phi_m v. \quad (34.15)$$

Silo vodnega curka, kot inženirji, izkoristimo za pogon vodnih turbin, ki ženejo električne generatorje. Iz visoko ležečih jezer vodimo vodo po cevi v dolino. Lopatice turbine oblikujemo v obliki čaše, tako da vpadajoča voda ne spolzi na tla, ampak se odbije nazaj. Tako je sprememba gibalne količine dvakrat večja kot sicer in toliko je večja tudi sila na lopatice. Namesto vodnih curkov lahko uporabimo tudi curke vodne pare, ki jo pripravljamo v visokotlačnih kotlih. To so parne turbine.

Odriv dveh teles Ko iz puške izstrelimo kroglo, udari puška nazaj. Krogla in puška sta sistem dveh teles, ki pa sedaj ne trčita skupaj, ampak se odrineta narazen. Pri tem se ohranja gibalna količina. Ohranitvena enačba je prav takšna kot pri trku dveh avtomobilov: $(m_1 + m_2) \cdot 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Kolikorkrat je puška težja od krogle, tolikokrat počasneje sune nazaj. Tipična krogla ima maso 10 g in odleti s hitrostjo 300 m/s. Tipična puška ima maso 3 kg, zato sune nazaj s hitrostjo 1 m/s. Očitno puška ne sme biti prelahka, sicer bi postala nevarna za strelca samega.

Reakcijska sila curka Namesto da streljamo kroglo iz puške, izpuščamo curek stisnjenega zraka iz napihnjene balona skozi njegovo ustje. Balon odleti v nasprotno stran kot curek. Kakšno silo čuti balon? Drugače rečeno: kakšna je reakcijska sila curka? Očitno je to nasprotni pojav kot pri vpadu curka na oviro, zato je tudi razmislek enak in celo rezultat je isti: $F = \dot{m} v$.



Slika 34.3 Izstrelitev rakete. Prikazana je ena izmed raket, razvitih med drugo svetovno vojno. Končna hitrost rakete je odvisna od deleža pokurjenega goriva in hitrosti izpuha. (NASA History Office)

Ne da bi poznali reakcijsko silo curka, smo jo kot ribiči in mornarji že od nekdaj izkoriščali za pogon čolnov: z vesli smo odrivali vodo nazaj in reakcija je potiskala čoln naprej. Kot inženirji pa namesto vesel raje uporabimo vijake. Ladijski vijaki zajemajo iz okolice vodo in jo potiskajo nazaj. Isto počno letalski vijaki z zrakom. Oboji jemljejo potisno snov iz okolice. Lahko pa vozilo takšno snov tudi vozi s seboj: v rezervoarjih ima spravljen tekoči kisik in tekoči vodik ali kaj podobnega. Sproti ju sežiga in nastale vroče pline izpušča skozi zadnje šobe. To je raketa. Z raketami sežemo v zunanje plasti ozračja in merimo tamkajšnje pojave. Izmerke s padalom vrnemo na tla. Nobene tehnične ovire ni – razen krmiljenja –, da prej ali slej poletimo okoli Zemlje, na Luno in na Mars!

Raketna enačba Kako pa se giblje raketa, če ni zunanjih sil? V izbranem trenutku ima raketa skupaj z gorivom maso m in hitrost v . Ko izvrže maso dm goriva z relativno hitrostjo u , se ji poveča hitrost za dv . Gibalna količina se ohranja: $m dv + u dm = 0$. Izrazimo dv in integriramo, pa dobimo

$$v - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (34.16)$$

To je raketna enačba (CIOLKOVSKI). Hitrost, ki jo raketa doseže, je odvisna le od masnega deleža pokurjenega goriva in od hitrosti izpuha. Če si mislimo, da drsi raketa po gladki Zemljini površini brez trenja in zračnega upora ter da ima hitrost izpuha 4 km/s, bi za doseg orbitalne hitrosti 8 km/s potrošila preko 85 % svoje začetne mase. Seveda pa moramo raketo izstreliti poševno navzgor, pri čemer jo zaustavljata gravitacija in upor zraka. Oboje se izraža kot izguba dosežene hitrosti za $gt \cos \theta$; ta izraz moramo odšteti na desni strani raketne enačbe. Ocenimo, kolikšen delež mase je potreben, da raketo spravimo do orbite! Naj se raketa dviguje s pospeškom $a = 10 \text{ m/s}^2$. Do višine $h = 300 \text{ km}$ se povzpne v času $t = \sqrt{2h/a} \sim 250 \text{ s}$. V tem času izgubi $gt \sim 2,5 \text{ km/s}$ pridobljene hitrosti. Raketa mora torej pokuriti toliko mase, da bi brez gravitacijskega zaviranja dosegla hitrost 10,5 km/s. Za to pa porabi okrog 95 % mase. Spraviti tonno težek satelit v orbito zahteva dvajsettonsko raketo. Da pokurimo čim manj dodatne mase, mora raketa doseči orbito čim prej, to je, dvigovati se mora s čim večjim pospeškom. Žal pa ljudje, ki jih morda raketa nosi, prevelikih pospeškov ne prenesejo.

34.4 Vrtilna količina

Vrtilna količina

Ko na i -ti delec deluje sila \mathbf{F}_i , deluje nanj hkrati tudi navor glede na poljubno izhodišče: $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times d(m_i \mathbf{v}_i)/dt$. Desno stran lahko zapišemo kot $d(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)/dt$. Ta izraz, ko ga diferenciramo, je namreč $\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times d(m_i \mathbf{v}_i)/dt$, pri čemer je prvi člen enak nič. Seštejemo navorne na vse delce, pri čemer se notranji navori medsebojno izničijo, in dobimo

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (34.17)$$

$$\int \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L}.$$

Vpeljali smo *vrtilno količino* \mathbf{L} . Če je sistem izoliran, se vrtilna količina ohranja, sicer pa je njena sprememba enaka sunku zunanjih navorov. To je *izrek o vrtilni količini* glede na poljubno središče (EULER). Seveda velja tudi za težišče.

Vrtilna količina težišča

Vrtilna količina glede na poljubno izhodišče in vrtilna količina glede na težišče sta številčno različni. Pojavi se vprašanje, ali sta med seboj kako povezani. Če s črtico označimo vektorje v težiščnem sistemu, velja $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i$ in $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'_i$. Oboje vstavimo v definicijsko enačbo za vrtilno količino, križema pomnožimo in dobimo štiri člene: $\mathbf{r}^* \times m \mathbf{v}^*$, $\mathbf{r}^* \times \sum m_i \mathbf{v}'_i$ ($\sum m_i \mathbf{r}'_i$) $\times \mathbf{v}^*$ in $\sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$. Vsoti v drugem in tretjem členu sta enaki nič, zato preostane:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}^* \times m \mathbf{v}^* + \mathbf{L}^*. \quad (34.18)$$

Prvi člen je vrtilna količina težišča glede na aktualno izhodišče, drugi pa vrtilna količina glede na težišče.

Kroženje planeta Poglejmo nekaj primerov. Sonce in Zemlja tvorita sistem, ki je od zunaj le malo moten. Privzemimo, da je popolnoma izoliran. Ker je Sonce mnogo težje od Zemlje, privzemimo še, da je težišče sistema kar v središču Sonca. Sistemu se ohranja vrtilna količina glede na težišče; k temu prispeva zgolj Zemlja: $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}$, torej $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}$. Kadar je Zemlja na svoji poti bližje Soncu, se zato giblje hitreje, in kadar je dalje proč, se giblje počasneje.

Pirueta drsalke Drsalka na ledu se zavrti okrog podporne noge s široko razprostrtima rokama in iztegnjeno nogo. Nato pritegne roki in nogo tesno k sebi in hitrost vrtenja se ji močno poveča. Med vrtenjem je drsalka približno izoliran sistem, ki se mu ohranja vrtilna količina. Ko pritegne zunanje dele telesa k sebi, zmanjša njihove razdalje r_i od vrtilne osi, zato se ustrezno povečajo njihove obodne hitrosti v_i , torej tudi kotna hitrost. Pritegnjeni zunanji deli nato povlečejo za sabo še osrednje dele telesa. To pa zato, ker čutijo – poleg centrifugalne sile – še odklonsko silo, ki jih pospešuje v tangentsni smeri vrtenja.



Slika 34.4 Drsalka na ledu izvaja pirueto. Kako hitro se vrti, kažejo njeni lasje in krilo. Pri tem se ohranja vrtilna količina. (Anon)

Zvezdna pirueta Vrtenje drsalke na ledu je namig, kako si lahko razlagamo vrtenje Sonca okoli svoje osi in vrtenje planetov okoli Sonca (ter svojih osi). Predstavljamo si, da se je Sončni sistem rodil iz ogromnega, zelo počasi se vrtečega oblaka plinov. Notranja gravitacija je oblak čedalje bolj sežemala in začetno vrtenje se je zato povečevalo. Lokalne zgoščine snovi, ki so ponekod nastale, so se nadalje stiskale in povečevale vrtenje. Končno so se zgostile v stanje, kakršno je danes.

34.5 Kinetična energija

Kinetična energija Ko na i -ti delec vzdolž premika $d\mathbf{s}_i$ deluje sila \mathbf{F}_i , je opravljeno delo $dA_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i$ enako spremembi kinetične energije $\frac{1}{2} m_i v_i^2$. Seštejemo delo sil na vse delce in dobimo

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (34.19)$$

$$A_{\text{ext}} + A_{\text{int}} = \Delta K.$$

Vsota dela vseh sil – zunanjih in notranjih – je enaka spremembi kinetične energije sistema. To je izrek o kinetični energiji.

Kinetična energija se ohranja le, kadar ni ne notranjega ne zunanjega dela. Notranjega dela ni tam, kjer ni notranjega trenja (kot pri nestisljivi in neviskozni tekočini) ali kjer ni notranjih relativnih premikov (kot pri togem telesu).

Kinetična energija težišča

Po zgledu vrtilne količine poskusimo razcepiti tudi kinetično energijo na dva dela: na kinetično energijo težišča in na kinetično energijo okrog težišča. Tako zapišemo $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_i'$ in vstavimo v definicijsko enačbo za kinetično energijo. Kvadiramo in pridemo do tri člene: $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^{*2}$, $\frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i'^2$ in $\mathbf{v}^* \sum m_i \mathbf{v}_i'$. Zadnji člen je enak nič, zato velja

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^{*2} + K^*. \quad (34.20)$$

Prvi člen je kinetična energija težišča, drugi pa kinetična energija glede na težišče. Rečemo jima tudi *translacijska* in *rotacijska* energija.

Spreminjanje energije

V izoliranem sistemu se gibalna količina in vrtilna količina vedno ohranjata, kinetična energija pa le, če ni notranjega dela. — Pri trku dveh avomobilev začetna kinetična energija "izgine". Porabila se je pač za notranje delo, torej za deformacijo in segrevanje nesrečne pločevine. — Pri strelu iz puške se kinetična energija "ustvari". Seveda je nastala na račun notranje energije smodnika. — Pri pirueti pa je zadeva naslednja. Začetno in končno vrtenje drsalke je togo in poteka okrog navpične osi. To pomeni, da za vsako točko velja $v_i = r_i \omega$. Vrtilno količino zato zapišemo kot $L = \omega \sum m_i r_i^2$ in kinetično energijo kot $K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$. To pomeni, da $K = L\omega/2$. Vrtilna količina se pri tvorjenju piruete ohrani, kinetična energija pa naraste! Od kod je prišla? Od notranjega dela, to je od drsalkinih mišic, ki so potegnile roki in nogo navznoter in pri tem premagovale centrifugalno ter odklonsko silo.

34.6 Gibanje togega telesa

Posebno preprost sistem delcev je tak, ki ohranja obliko; rečemo, da je *tog*. Kamen, na primer, je tog sistem. V takem sistemu se razdalja med poljubnima točkama ne spreminja. Ker so togi sistemi poseben primer "splošnih" sistemov, velja zanje vse že povedano. Zaradi njihove posebnosti pa pričakujemo, da bomo lahko povedali še kaj dodatnega. Pri obravnavanju bomo privzeli, da so togi sistemi zvezni.

Določevanje težišča

Težišče togega telesa je, očitno, vedno na istem mestu glede na masne točke, ki ga sestavljajo. Določamo ga po definicijski enačbi (34.10), ki jo za zvezna telesa zapišemo kot $m \mathbf{r}^* = \int \mathbf{r} dm = \int \mathbf{r} \rho dV$. Homogena simetrična telesa imajo težišča v svojih prostorskih središčih; to velja za kvader, valj in kroglo. Kratki računi pokažejo, da je težišče stožca na $1/4$ njegove višine in težišče

polkrogle na $3/8$ njenega radija. Težišča drugih teles bomo računali takrat, ko/če bo potrebno. "Nepravilnim" telesom določamo težišča - kot že vemo [9.7] - tako, da jih obešamo na vrvice.

Če je telo sestavljeno iz dveh teles A in B, ki jima poznamo težišči, ju lahko nadomestimo s točkastima masama v njunih težiščih. Za eno koordinato velja namreč $M \cdot x^* = \sum_{A,B} m_i x_i = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A x_{A^*} + M_B x_{B^*}$. Težišče teh dveh točkastih mas pa leži na njuni zveznici in je zlahka določljivo.

Posebej zvito je računanje težišča homogenega telesa, recimo ravnila, v katerega je na enem koncu izvrtana luknja. V mislih jo zapolnimo s primernim čepom in izračunamo težišče polnega ravnila. Potem pa na nasprotno stran tega težišča prilepimo prav tak čep, določimo njegovo težišče in iz obeh težišč določimo skupno težišče.

Translacija in rotacija

Togo telo se lahko giblje na dva odlikovana načina: vse njegove točke se gibljejo vzporedno ali vse točke krožijo okoli poljubne osi. Prvo gibanje imenujemo *translacija*, drugo *rotacija*. Iz teh dveh osnovnih gibanj lahko sestavimo poljubno gibanje. To je zaporedje kratkih translacij težišča in majhnih rotacij okoli trenutnih osi iz težišča. Oboje določajo okolišnje sile in njihovi navori. Gibanje težišča opisuje izrek o gibalni količini in gibanje okoli njega opisuje izrek o vrtilni količini. Velja še izrek o kinetični energiji, pri čemer je notranje delo enako nič. V vseh izrekih so hitrosti delcev izražene kot $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$. Gibanje težišča je takšno kot gibanje točkastega telesa in z njim ne bomo izgubljali časa. Posvetimo se raznim oblikam vrtenja.

34.7 Vrtenje okoli stalne osi

Otroški vrtiljak

Osnovni primer vrtenja predstavlja otroški *vrtiljak* z navpično osjo. Pri praznem vrtiljaku gre ponavadi os skozi težišče, če pa nanj naložimo kakšen zaboj, se težišče premakne in os ne gre več skozenj. Privzeli bomo, da je os poljubna, to je, da gre bodisi skozi težišče ali izven njega.



Slika 34.5 Vrtiljak. Vsi deli vrtiljaka se vrtijo okoli stalne navpične osi z enako kotno hitrostjo. Hitrost vrtenja je določena z zunanji navori, ki jih izvajajo igrajoče se deklice. (Warnock, T.)

Podnožje osi vzamemo za izhodišče koordinatnega sistema. Delec i vrtiljaka je oddaljen od izhodišča za l_i in od navpične osi za r_i ter se giblje s tangентno hitrostjo v_i . Njegova vrtilna količina zato znaša $L_i = m_i l_i v_i$. Za navpično komponento velja $L_{z,i} / L_i = r_i / l_i$, torej $L_{z,i} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$. Seštejemo po vseh delcih in dobimo za

vrtilno količino v navpični smeri (indeks z bomo odslej kar izpuščali):

$$\begin{aligned} L &= J\omega \\ J &= \sum m_i r_i^2. \end{aligned} \quad (34.21)$$

Vztrajnostni moment Količino J poimenujemo *vztrajnostni moment* vrtiljaka glede na aktualno navpično os. Odvisen je od mase in njene razporeditve okoli osi. Opazimo, da je prav vseeno, kje na tej osi izberemo izhodišče. Vsakokratna vrtilna količina in vztrajnostni moment okrog navpične osi sta zmeraj enako velika.

Sprememba vrtilne količine je seveda enaka vsoti zunanjih navorov, kar pa v primeru togega telesa zdaj zapišemo v preprostejši obliki:

$$M = \frac{dJ\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{dt}. \quad (34.22)$$

Enačba ima popolnoma enako obliko kot gibalni zakon za premo gibanje. Zato takoj uvidimo: če navorov ni, je vrtenje enakomerno. Stalni navor pa povzroči enakomerno pospešeno vrtenje.

Določanje momentov V zvezni obliki zapišemo vztrajnostni moment (34.21) kot $J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$. Kratki računi pokažejo naslednje. Tanek cilindar polmera r ima vztrajnostni moment (okoli simetrijske osi) mr^2 . Enako težek valj z enakim polmerom ima $1/2$ tega, kroglja $2/5$ tega in drog zgolj $1/3$ tega. Vztrajnostni moment sestavljenega telesa, recimo tankega cilindra in na njem položenega prečnega trama, se seštevajo. Posebej zvito je spet računanje, kadar ima osnovno telo kakšno luknjo. Velja namreč $J_{\text{full}} = J_{\text{drilled}} + J_{\text{plug}}$.

Kinetična energija Podobno kot vrtilno količino poenostavimo tudi izraz za kinetično energijo. V njeni definicijski enačbi (34.19) nadomestimo tangentne hitrosti v_i z $r_i\omega$ in dobimo

$$K = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (34.23)$$

Mimogrede še opazimo, da velja $K = L\omega/2$. Sprememba kinetične energije je seveda enaka delu zunanjih sil, saj je delo notranjih sil enako nič. K delu prispevajo le tangentne komponente sil, torej $A = F_t r d\varphi = M d\varphi$.

Kroženje težišča Vrtenje vrtiljakove ploščadi okrog aktualne navpične osi, ki ne gre skozi težišče, je sestavljeno iz kroženja težišča okrog te osi in iz hkratne rotacije okrog (vzporedne) težiščne osi. Kroženje in rotacija imata isto kotno hitrost. Domnevamo, da se sestavljeno gibanje izraža kot vsota obeh delnih gibanj, torej

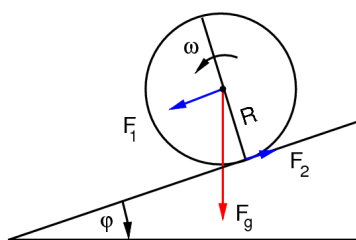
$$\begin{aligned}
 J &= J^* + mr^{*2} & (34.24) \\
 L &= L^* + mr^{*2}\omega \\
 K &= K^* + \frac{1}{2} mr^{*2}\omega^2.
 \end{aligned}$$

Zadnja dva izreka sta pravzaprav le specializacija izrekov o vrtilni količini in o kinetični energiji težišča v splošnem (netogem) sistemu, ki smo ju že spoznali. Prvi izrek pa takoj sledi iz drugega, če slednjega zapišemo kot $J\omega = J^*\omega + mr^{*2}\omega$ in delimo z ω .

34.8 Premikanje osi vrtenja

Kotaljenje po klancu

Pri vrtiljaku je os vrtenja stalna. Pri kolesu, ki ga *zakotalimo* po klancu, pa se os vrtenja premika, in sicer vzporedno sama s seboj.

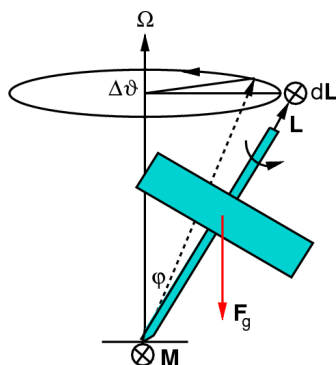


Slika 34.6 Kotaljenje kolesa po klancu. Čim večji je vztrajnostni moment kolesa, tem manjši je pospešek njegovega težišča.

Na kolo delujeta dve sili: v težišču prejmlje in nizdol klanca vleče komponenta teže $F_1 = mg \sin \varphi$. V dotikališču pa prejmlje in navzgor po klancu deluje sila podlage F_2 . Zadnja sila tudi izvaja navor $F_2 r$ glede na os kolesa. Velja $F_1 - F_2 = ma^*$ in $F_2 r = J^* \alpha$. Ker $r\omega = v_t = v^*$, je $\alpha = a^*/r$. Iz vsega skupaj sledi $a^* = g \sin \varphi / (1 + J^*/mr^2)$. Kolo se torej pospešuje manj kot drseče sani. Večji kot je vztrajnostni moment, manjši je pospešek. Pri krogli znaša le $5/7$ drsnega pospeška in pri valju zgolj $2/3$. V vsakem trenutku je kinetična energija kolesa enaka vsoti translacijske in rotacijske. Vsota kinetične in potencialne energije se pa ohranja.

Precesija vrtavke

Otroci se od nekdaj radi igrajo z *vrtavkami*. Takšno vrtavko postavimo s spodnjim koncem osi na mizo, usmerimo os navpično navzgor in jo s prsti zavrtimo z veliko hitrostjo. Vrtavka se vrtil in njena os ostaja lepo navpična.



Slika 34.7 Vrtavka. Če jo zavrtimo z nagnjeno osjo, se začne ta vrteti okoli navpične osi in pri tem zarisuje plašč stožca.

Če vrtavko zavrtimo s poševno nagnjeno osjo, se zgodi nekaj presenetljivega: vrtavka ne pade, ampak začne njena os krožiti okrog navpičnice. Pri tem zarisuje plašč stožca. Pojavu rečemo *precesija*. Kaj lahko povemo o njem?

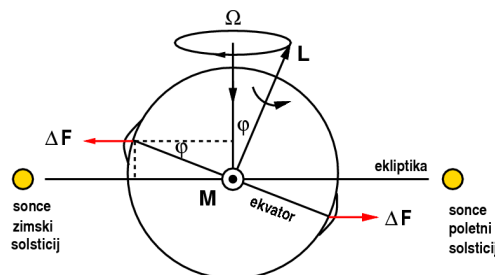
Vrtilna količina vrtavke L je usmerjena vzdolž njene osi. V časovni enoti dt se os zavrti za kot $d\theta$ okrog navpičnice. Velikost vrtilne količine se pri tem ne spremeni po velikosti, ampak le po smeri. Velja $dL = L_0 \sin \varphi d\theta$. Sprememba vrtilne količine na časovno enoto znaša $dL/dt = L \sin \varphi \Omega$. Povzročiti jo je moral nek navor. Tega izvaja teža, ki prijemlje v težišču vrtavke, glede na dotikalnišče osi s tlemi. Navor $M = mg \sin \varphi$ je vodoraven. Ko upoštevamo smeri vseh vektorjev, dobimo:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (34.25)$$

Vrtavkina os precedira s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\Omega}$ okoli navpičnice. Precesija je tem hitrejša, čim večji je navor, to je, čim bolj je vrtavka nagnjena. Pri danem nagibu pa je precesija tem počasnejša, čim hitreje se vrtavka vrti. Ko se zaradi trenja vrtavka počasi ustavlja, se njena hitrost precesije veča.

Zemlja kot vrtavka

Tudi Zemlja je vrtavka. Vrti se okoli polarne osi, ki je nagnjena glede na normalo ekliptike. Na Zemljo deluje Sonce s silo, ki pada z razdaljo (19.17). Masno središče in težišče krogle sta zato rahlo razmaknjena. Če bi bila Zemlja popolnoma okrogla, bi ležalo njeno težišče na zveznici med masnima središčema Sonca in Zemlje in slednja ne bi čutila nobenega navora. Ker pa je sploščena, ima okrog ekvatorja dodatni masni obroč. Sonce privlači bližnji del obroča močneje kot oddaljenega in s tem izvaja navor na Zemljo. Če se ta ne bi vrtela, bi jo sčasoma Sonce zasukalo tako, da bi bila njena polarna os pravokotna na ekliptiko. Ker pa se vrti, reagira kot vrtavka: vrtilna os precedira. Sončev navor je najmočnejši ob solsticijih in enak nič ob ekvinokcijih. Vendar deluje vedno istosučno. Enako kot Sonce deluje na Zemljo tudi Mesec. Oba navora se seštevata. Tako smo našli kvalitativno razlago za že dolgo znano precesijo točke gama po nebesnem ekvatorju [7.8].



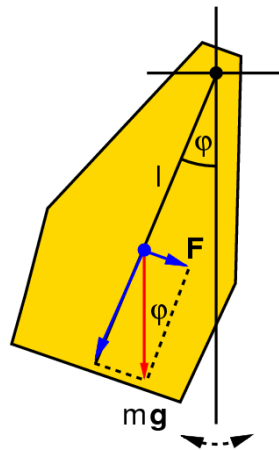
Slika 34.8 Zemlja kot vrtavka. Polarna os zarisuje med zvezdami krog. Trenutno kaže v smer zvezde Severnice, ki je zato tudi dobila svoje ime.

Ocenimo velikost precesije $\Omega = M/L \sin \varphi$! — Vrtilno količino Zemlje zapišemo kot $L = \omega \cdot (2/5)mR^2$. — Maksimalni navor na ekvatorski obroč ocenimo z $M = 2 \cdot \Delta F R \sin \varphi$. — Silo na masni polobroč $dm/2$ ocenimo z gradientom gravitacijske sile,

$dF/dr = 2\kappa (dm/2) (M_S/r_S^3 + M_M/r_M^3)$, pri čemer vzamemo $dr = R \cos \varphi$. — Masni obroč določimo iz razlike prostornin elipsoida z veliko polosjo a in krogle: $dV = (4\pi/3)aR^2 - (4\pi/3)R^3$, torej po množenju z gostoto $dm = m(a/R - 1)$. — Vse skupaj vtaknemo v izhodiščno enačbo. Časovno spremenljivost navora upoštevamo tako, da vzamemo kar 1/2 maksimalnega. Dobimo rezultat $\Omega = (5/2)\kappa (M_S/r_S^3 + M_M/r_M^3) \cos \varphi (a/R - 1) / \omega$. Vse količine na desni strani poznamo in izračunamo obhodni čas precesije ~ 16 tisoč let. To je dobra velikostna ocena za dejansko vrednost 26 tisoč let. Zanimivo je, da je vpliv Sonca na precesijo manjši kot vpliv Meseca; razmerje njunih vplivov znaša okrog 1:2.

34.9 Nihanje togih teles

Težno nihalo Na steni obešena slika zaniha, ko jo odmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo. Nasploh vsako togo telo, ki je vrtljivo okoli vodoravne izven-težiščne osi, niha okrog ravnovesne lege. Rečemo, da je to *težno nihalo*.



Slika 34.9 Nihanje togega telesa. Teža prijmlje v težišču in suče telo okrog ravnovesne lege zdaj sem, zdaj tja.

Na obešeno telo deluje teža mg . Prijemlje v težišču. Ko je telo odmaknjeno za majhen kot φ , ima teža komponento $F = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi$ proti ravnovesni legi. Ta komponenta izvaja navor $M = lF$ glede na obesišče. Velja $M = J\varphi''$. Ker $J = J^* + ml^2$, sledi $\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0$. To je znana enačba nihanja s frekvenco

$$\omega_0^2 = \frac{gl}{1 + J^*/ml^2}. \quad (34.26)$$

Če je vse telo stisnjeno v težišče, je $J^* = 0$ in frekvenca nihanja postane $\sqrt{g/l}$, kakor tudi mora biti.

Torzijsko nihalo Pri obešenem telesu povzročata sučno nihanje navor teže. Lahko pa telo prebodemo skozi težišče in sučni navor povzročamo s spiralno vzmetjo: $M = -k\varphi$. Namesto spiralne vzmeti lahko telo obesimo kar na žico. Tako dobimo *torzijsko nihalo*.



Slika 34.10 Na žici obešena krožna plošča sučno niha okoli ravnovesne lege. To je torzijsko nihalo. Čim tanjša je žica, tem počasnejše je nihanje. (Kenyon College)

Enak premislek kot prej vodi do enake enačbe gibanja s konstanto

$$\omega_0^2 = \frac{k}{J^*}. \quad (34.27)$$

Torzijsko nihalo je nadvse primerno za merjenje vztrajnostnih momentov teles. Najprej za znani vztrajnostni moment, recimo za krožno ploščo, izmerimo frekvenco nihanja ter tako določimo konstanto vzmeti. Potem pa iz znane konstante vzmeti in iz izmerjene frekvence določimo neznan vztrajnostni moment, recimo za (todega) človeka okrog treh težiščnih osi.

34.10 Splošno nihanje teles

Prosto nihanje Skupne poteze obravnavanih nihanj lahko zajamemo z isto enačbo oblike

$$u'' + \omega_0^2 u = 0. \quad (34.28)$$

Rešitev enačbe je, kot vemo, harmonično nihanje s frekvenco ω_0 . Količina u , ki niha, je lahko razdalja, kot ali kaj drugega. Velja torej

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \quad (34.29)$$

Konstanti c_1 in c_2 sta določeni z začetnimi pogoji. Če začnemo šteti čas v maksimalni amplitudi, na primer, postavimo $c_2 = 0$.

Zdaj, ko že poznamo kompleksna števila, pa opazimo še naslednje. Zapisana nihajna enačba je pravzaprav realni (ali imaginarni) del kompleksne enačbe s povsem enako obliko, le da je v njej količina $\hat{u} = (x + iy)$ kompleksna: $(x + iy)'' + \omega_0^2 (x + iy) = 0$ pomeni $(x'' + \omega_0^2 x) + i(y'' + \omega_0^2 y) = 0$, to je par "navadnih" enačb. Zato jo rešujemo kar s kompleksnim nastavkom $\hat{u} = (u_0 \exp i\delta) \exp i\omega t$. Ko ga vstavimo v nihajno enačbo, dobimo $(i\omega)^2 + \omega_0^2 = 0$, torej $\omega = \omega_0$. Tako realni kot imaginarni del kompleksnega nastavka sta iskani rešitvi: $u = u_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$ ali $u = u_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$. Konstanti u_0 in δ določimo iz začetnih pogojev. Če upoštevamo še obrazec za sinus ali kosinus vsote (15.15), pa dobimo rešitev v obliki $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$. Novi konstanti se izražata s starima: $u_0^2 = c_1^2 + c_2^2$ in $\tan \delta = -c_2/c_1$.

Vzbujeno nihanje

Kako se giblje nihalo, če nanj deluje dodatni zunanji harmonični vpliv s svojo frekvenco? Veter z zaporednimi sunki, na primer, poganja gugalnico. Nihajno enačbo zapišemo kot

$$u'' + \omega_0^2 u = A \cos(\omega t + \delta). \quad (34.30)$$

Zapisano enačbo razširimo v kompleksno obliko $\hat{u}'' + \omega_0^2 \hat{u} = \hat{A} \exp i\omega t$, pri čemer $\hat{A} = A \exp i\delta$. Za rešitev pričakujemo nihanje z isto frekvenco kot zunanji vpliv, zato izberemo nastavek $\hat{u} = \hat{u}_0 \exp i\omega t$, pri čemer $\hat{u}_0 = u_0 \exp i\theta$, in ga vtaknemo v nihajno enačbo. Dobimo $(i\omega)^2 \hat{u}_0 + \omega_0^2 \hat{u}_0 = \hat{A}$, torej $\hat{u}_0 = \hat{A}/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Količini \hat{u}_0 in \hat{A} sta povezani z realnim sorazmernostnim faktorjem, zato sta njuni fazi enaki in velja

$$u = u_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (34.31)$$
$$u_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)}}.$$

Nihalo niha harmonično z isto frekvenco ω kot vzbujevalec. Čim manjša je razlika med frekvenco vzbujevalca in lastno frekvenco ω_0 nihala, tem večja je amplituda u_0 nihanja. Ko sta frekvenci enaki, je amplituda neskončna. Rečemo, da je nihalo v *resonanci* z vzbujevalcem. Seveda nastopa v naravi trenje, ki ga nismo upoštevali, in so zato vzbujene amplitude končne.



Slika 34.11 Vzbujeno nihanje mostu v Tacomi. Šibek spremenljiv veter ravno pravšnje frekvence je most spravil v resonantno nihanje in ga povsem porušil. (New York Times)

Vzbujano nihanje z dušenjem

Pa raziščimo vzbujeno nihanje z dušenjem! Predpostavimo, da velja linearni zakon upora, in zapišimo nihajno enačbo

$$u'' + \gamma u' + \omega_0 u = A \cos(\omega t + \delta). \quad (34.32)$$

Postopamo enako kot pri nedušenem vzbujanju in prideltamo enačbo $\hat{u}_0 = \hat{A}/(\omega_0 - \omega + i\gamma\omega) = \hat{R}\hat{A}$. To enačbo zapišemo v obliki $\hat{u}_0 = R \exp i\theta \cdot A \exp i\delta = RA \exp i(\theta + \delta)$. Realni del leve strani je enak realnemu delu desne strani, zato

$$u = RA \cos(\omega t + \delta + \theta). \quad (34.33)$$

Nihanje je harmonično s frekvenco vzbujevalca, vendar je časovno zamaknjeno. Amplituda je določena z R in faza s θ . Določimo ju!

Definicijski izraz za \hat{R} kvadriramo, to je, pomnožimo ga s konjugirano vrednostjo, in dobimo:

$$R = \frac{1}{\sqrt{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}} \quad (34.34)$$

Recipročni izraz za \hat{R} preoblikujemo takole: $1/\hat{R} = 1/R \exp i\theta = (1/R) \exp(-i\theta) = (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$. Realni del dobljenega izraza je $\cos \theta$ in imaginarni del je $-\sin \theta$. Njuno razmerje pove

$$\tan \theta = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (34.35)$$

Pri nizkih vzbujevalnih frekvencah nihalo kar sledi vzbujevalcu. Pri visokih stoji pri miru, saj nima časa, da bi mu sledilo. Trenje poskrbi, da je resonantno ojačanje končno. Nihanje vedno kasni za vzbujevanjem. Kasnenje narašča s frekvenco. V resonanci kasni natanko za četrt nihaja.

Dušeno nihanje Preostane še dušeno nihanje. Spet predpostavimo, da velja linearni zakon upora in zapišimo

$$u'' + \gamma u' + \omega_0^2 u = 0 \quad (34.36)$$

Na enačbo pogledamo, kot da je kompleksna. Pričakujemo nihanje z zmanjševanjem amplitude s časom in zato poskusimo z nastavkom $\hat{u} = \exp i\hat{r}t$ s kompleksnim \hat{r} . Kompleksni eksponent namreč vsebuje realni in imaginarni del, ki poskrbita za oboje. Dobimo $(-\hat{r}^2 + i\gamma\hat{r} + \omega_0^2) \exp i\hat{r}t = 0$. Prvi faktor mora biti enak nič, to pa je pri $\hat{r} = i\gamma/2 \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2/4)}$ oziroma okrajšano $\hat{r} = i\gamma/2 \pm \omega$. Privzemimo, da je dušenje tako majhno, da je podkorenski izraz pozitiven. Tedaj je frekvenca ω realna. Potem dobimo rešitev $\hat{u} = \exp(-\gamma t/2) [c_1 \exp(i\omega t) + c_2 \exp(-i\omega t)]$. Da bomo kompleksno rešitev reducirali na realno, moramo postaviti $c_2 = c_1^*$ oziroma obratno in dobimo

$$u = u_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta) \quad (34.37)$$

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}, \gamma < \omega_0.$$

Nihanje je harmonično z manjšo frekvenco kot pri prostem nihanju, amplitude pa so eksponentno dušene. Če je dušenje premočno, si zlahka predstavljamo, da do nihanja sploh ne pride, ampak preostane le eksponentno pojemanje. Računsko pa se tega ne bomo lotili.

34.11 Gravitacijska konstanta

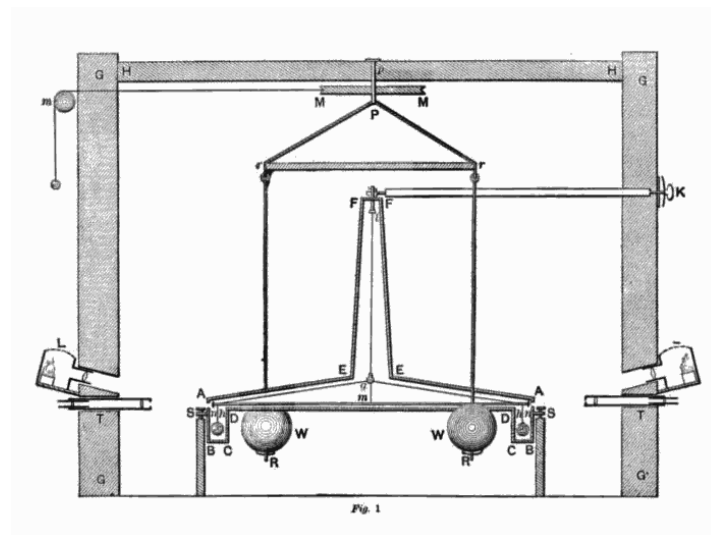
S sučnim nihalom na tanko žico smo dobili v roke zelo občutljiv merilnik sil. Vzbudi nam upanje, da bi lahko z njim izmerili gravitacijski privlak med dvema kroglama z znano maso in na znani razdalji ter tako določili *gravitacijsko konstanto* in preko nje maso Zemlje. Z veliko truda nam - kot zelo spretnemu eksperimentatorju - to tudi uspe (CAVENDISH).

Torzijska tehtnica Na tanko žičko obesimo lahek vodoraven vzvod dolžine $2r$ z dvema svinčenima kroglama mase m na koncih. Celotni drog ima vztrajnostni moment $J = 2mr^2$. Ko ga zasučemo in spustimo,

izmerimo še nihajni čas T in iz tega izračunamo sučno konstanto $k = J(2\pi/T)^2$. Uporabimo tanko in dolgo nitko, da je konstanta čim manjša, to je, nihajni čas mora biti čim večji. Sedaj je vse pripravljeno. Umirimo vzvod in v neposredno bližino obeh malih krogel primaknemo dve veliki krogli z masama po M . Razdaljo med središčema male in velike krogle, l , izmerimo predhodno. Počakamo da se vzvod zasuče. Da meritve ne motimo, jo delamo v zaprti sobi in gledamo na sučno skalo z daljnogledom. Iz izmerjenega zasuka izračunamo navor, iz tega privlak med kroglama in končno še gravitacijsko konstanto. Dobimo

$$\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2. \quad (34.38)$$

Naša dosedanja ocena [19.9] torej ni bila prav nič slaba. Za uspešno meritev smo uporabili: dolžino droga 2 m, maso male krogle 0,5 kg, maso velike krogle 150 kg, razdaljo med središčema krogel 250 mm in nihajni čas ~ 20 minut (!). Pri vsem tem izmerimo zasuk konca droga komaj za ~ 5 mm.



Slika 34.12 Merjenje težne konstante. Privlačna sila med veliko in majhno kroglo zasuče nihalo. Velikost zasuka pove silo med znanima masama pri znani oddaljenosti in s tem težno konstanto. (Cavendish, 1798)

Tehtanje Zemlje

Pri merjenju smo predpostavljali, da se krogli privlačita tako, kot da bi bila vsa njuna masa zgoščena v njunih središčih.

Ko je gravitacijska konstanta izmerjena, jo uporabimo za določitev mase Zemlje iz težnega pospeška na njeni površini: $g = \kappa M/r^2$. Za maso dobimo $6,0 \cdot 10^{24}$ kg. To pomeni, da znaša povprečna gostota $5,5 \text{ kg/dm}^3$. Ker je iz neposrednih meritev znano, da je gostota kamnin na površju Zemlje okrog $2,5 \text{ kg/dm}^3$, mora biti Zemlja v središču ustrezno gostejša. Naša dosedanja ocena gostote - kot sredine med maso apnenca in maso železa - je bila torej kar dobra.

34.12 Gravitacijsko polje

Tudi to, kar smo doslej že dognali o gravitacijskih poljih, hočemo sedaj povzeti v jeziku vektorskih polj. Pri tem pričakujemo, da bomo odkrili tudi kaj novega.

Jakost polja Jakost gravitacijskega polja \mathbf{g} v izbrani točki lahko določimo (19.1) z gravitacijsko silo \mathbf{F}_g na tamkajšnji testni delec z maso m :

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}. \quad (34.39)$$

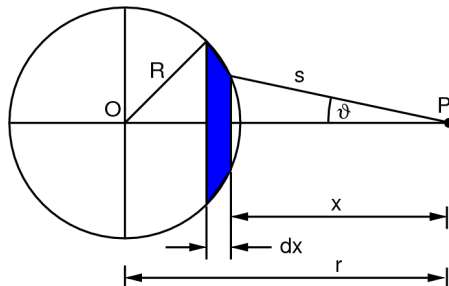
Gravitacijsko polje točkastega telesa z maso M pojema, kot znano (19.18), z oddaljenostjo \mathbf{r} od njega. Polje v točki P, povzročeno od masnega izvora v točki Q, znaša

$$\mathbf{g}_P = -\kappa \frac{m_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (34.40)$$

Enotni vektor \mathbf{n}_{QP} kaže od točke Q proti točki P. Sistem delcev pa ustvarja v točki P skupno polje

$$\mathbf{g}_P = - \sum_Q \kappa \frac{m_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (34.41)$$

Polje krogle Polje krogle določimo tako, da najprej izračunamo polje krogelnega obroča, nato krogelne lupine in slednjič celotne krogle.



Slika 34.13 Polje krogelnega obroča.

Masa obroča znaša $dm = 2\pi R\sigma dx$, pri čemer je σ ploskovna masna gostota. V točki P povzroča ta obroč polje $d\mathbf{g} = dm\kappa \cos\theta/s^2$.

Določiti moramo še odvisnost $\theta(s)$ in $x(s)$. — Ker

$R^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta$, velja $\cos\theta = (r^2 - a^2 + s^2)/2rs$. — Ker

$dx/ds = s/r$, velja $dx = sds/r$. Oboje vstavimo v polje obroča in

dobimo $d\mathbf{g} = (\pi R\kappa\sigma/r^2)(1 + (r^2 - R^2)/s^2)ds$. Če je točka P zunaj

lupine, integriramo med $r-R$ in $r+R$ ter dobimo $\mathbf{g} = \kappa m/r^2$. To je točno toliko, kot da bi bila vsa masa lupine stisnjena v središče.

Če je P znotraj lupine, pa integriramo med $R-r$ in $R+r$ ter dobimo $\mathbf{g} = 0$. Seveda je polje znotraj lupine enako nič le tedaj, če ni

drugih mas zunaj lupine. Če obstajajo zunanje mase (kar seveda zmeraj), nas krogelna lupina ne ščiti pred njihovim poljem.

Polna krogla je sestavljena iz koncentričnih lupin. Vsaka lupina proizvaja takšno polje, kot da bi bila stisnjena v središču. Zunanje točke čutijo torej takšno polje, kot da bi bila vsa masa krogle

združena v njenem središču. Notranje točke pa čutijo takšno polje, kot da bi zunanje plasti ne bilo in bi bila vsa masa iz notranjih plasti združena v središču. Povedano velja za slojevito kroglo, to je tako, katere masa se spreminja z radijem. Če je krogla homogena, pa je notranja masa m_r sorazmerna z r^3 , torej $m_r/m = r^3/R^3$ in polje zato znaša $g = \kappa m r/R^3$. Polje linearno narašča od 0 v središču do $\kappa m/R^2$ na površini.

Če bi skozi homogeno Zemljo izvrtali navpični jašek od pola do pola in vanj spustili kroglo, bi ta čutila silo $F_g \propto -r$, to je $F_g/m = -g_0 r/R$, in bi nihala sem in tja. Nihajni čas bi znašal $T = 2\pi \sqrt{R/g_0}$, torej 1,4 ure. To je natanko toliko, kot potrebuje izstrelek za obhod okoli Zemlje [18.9].

Potencial polja

Ko se testni delec premakne iz ene točke v drugo, opravi gravitacijsko polje na njem delo $A = \int m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$. Če deluje sila v smeri premika, je delo pozitivno in delcu se poveča kinetična energija. In obratno. Delo je neodvisno od ubrane poti med obema točkama, saj bi sicer z gibanjem po zaključeni zanki dobili stroj za pridobivanje kinetične energije iz nič. Po definiciji je dovedeno delo enako spremembi potencialne energije. Hočemo, da pozitivno delo odgovarja zmanjšanju potencialne energije, zato definiramo:

$$W - W_0 = - \int m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}. \quad (34.42)$$

Referentno točko 0 izberemo kjerkoli in tamkajšnjo potencialno energijo postavimo na poljubno vrednost, najbolje na nič. Delo gravitacije na masno enoto poimenujemo *gravitacijski potencial*:

$$\phi - \phi_0 = - \int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}. \quad (34.43)$$

Očitno velja $W = m\phi$. Iz definicije potenciala tudi neposredno sledi $\phi_{AB} = -\phi_{BA}$ ter $\phi_{AB} = \phi_{0A} - \phi_{0B} = \phi_A - \phi_B$. Za točkast delec pokaže integriranje, pri čemer postavimo potencial v neskončnosti na nič,

$$\phi_P = - \kappa \frac{m_Q}{r_{QP}}. \quad (34.44)$$

Potencial sistema delcev je očitno vsota potencialov posameznih delcev:

$$\phi_P = - \sum_Q \kappa \frac{m_Q}{r_{QP}}. \quad (34.45)$$

Gravitacijsko polje sistema torej lahko izračunamo na dva načina: z vektorskim seštevanjem jakosti ali s skalarnim seštevanjem potencialov. Slednje je lažje. Iz potenciala pa, kot znano (32.7), sledi jakost polja takole: $\mathbf{g} = -\nabla\phi$.

34.13 Gibanje planetov

Lahek planet

Sonce in njegov planet, recimo Zemlja, sta približno izoliran sistem dveh teles. Če je planet lahek v primerjavi s Soncem, je težišče sistema kar v središču Sonca in relativno se giblje zgolj planet. Ohranja se vrtilna količina sistema, h kateri prispeva le planet, in se v polarnih koordinatah zapiše kot

$$L = mr^2\varphi'. \quad (34.46)$$

Zaradi te ohranitve je gibanje ravninsko. Ohranja se tudi vsota kinetične in potencialne energije:

$$E = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2\varphi'^2) - \frac{\alpha}{r}. \quad (34.47)$$

Črtnice označujejo odvode po času. Zaradi kratkosti smo zapisali $\alpha = kmM$.

Izračunati hočemo tir, po katerem se giblje planet. Doslej smo bolj ali manj upravičeno privzemali, da je to krog, sedaj pa poskusimo tir izpeljati kot posledico gravitacijskega zakona. V energijski enačbi nadomestimo dr/dt z $dr/d\varphi \cdot \varphi'$ in nato v njej nadomestimo vse φ' s tistim iz vrtilne enačbe. Izrazimo $d\varphi$ in integriramo, pa dobimo:

$$\varphi = \int \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{[2m(E + \alpha/r) - L^2/r^2]}}. \quad (34.48)$$

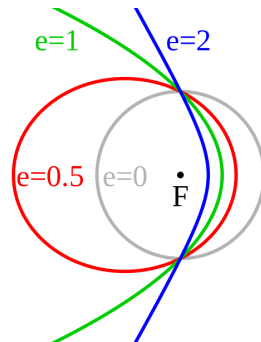
To je enačba tira $r = r(\varphi)$ v inverzni obliki. Preoblikujemo faktor dr/r^2 v $d(1/r)$ in s tem, po nekaj truda, prevedemo integral v standardno obliko $\varphi \propto \int du/\sqrt{(1-u^2)}$, katere rešitev je arkus kosinus. Rezultat na koncu, spet z nekaj truda, polepšamo v obliko

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ p &= \frac{L^2}{m\alpha} \\ \varepsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}. \end{aligned} \quad (34.49)$$

Stožernice

Oblika krivulje, po kateri se giblje planet okoli Sonca, je odvisna od parametrov p in ε . Kakšne krivulje so to? Če $\varepsilon = 0$, je to očitno krožnica z radijem p . Ko $\varphi = 90^\circ$, imajo vse krivulje enako oddaljenost od gorišča, namreč p . Pa narišimo te krivulje za isto vrednost p in za različne vrednosti ε ! Slika pokaže, da so to: krog ($\varepsilon = 0$); elipsa ($\varepsilon < 1$ oziroma $E < 0$); parabola ($\varepsilon = 1$ oziroma $E = 0$); in - nova krivulja! - hiperbola ($\varepsilon > 1$ oziroma $E > 0$). Vse te krivulje so očitno sorodne, to je, spadajo v isto skupino; recimo jim *stožernice*. Planet se torej lahko giblje okrog Sonca ne samo po krogu, ampak po katerikoli stožernici.

Naj bo planet v začetnem trenutku v legi \mathbf{r}_0 in naj ima hitrost \mathbf{v}_0 . Njegova energija znaša $E = mv_0^2/2 - \alpha/r_0$. Z energijo je oblika tira – krožnica, elipsa, parabola ali hiperbola – popolnoma določena. Presenetljivo je odvisna zgolj od velikosti hitrosti in nič od njene smeri.



Slika 34.14 Stožernice. Planet se giblje okrog Sonca po krožnici, elipsi, paraboli ali hiperboli, odvisno od njegove začetne lege in hitrosti. (Scott, A.)

Kako se že spoznani parametri stožernic izražajo s parametroma p in ε ? Nekaj računanja in risb pove naslednje.

Polosi elipse sta $a = p/(1 - \varepsilon^2) = \alpha/2|E|$ in $b = p/\sqrt{1 - \varepsilon^2} = L/\sqrt{2m|E|}$. Velika polos je odvisna zgolj od energije, nič od vrtilne količine. Najmanjši in največji radij znašata $r_{\min} = p/(1 + \varepsilon) = a(1 - \varepsilon)$ in $r_{\max} = p/(1 - \varepsilon) = a(1 + \varepsilon)$. Za parabolo velja $r_{\min} = p/2$. Tako se giblje planet, če v neskončnosti začne s hitrostjo nič. Za hiperbolo pa dobimo $r_{\min} = p/(e + 1) = a(\varepsilon - 1)$.

Obhodni čas Kakšen je *obhodni čas* po elipsi? Vrtilno enačbo zapišemo v obliki $L = mr^2\dot{\varphi} = 2mS'$, kjer je S ploščina, ki jo zarisuje radij vektor. Integriramo po času od 0 do T , ko je zarisana vsa ploščina: $LT = 2mS$. Ploščina elipse znaša $S = \pi ab$ (kar uganemo po primerjavi s krogom kot posebnim primerom ali izračunamo integral $S = 4 \int_0^a y dx = (4b/a) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$), zato

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}. \quad (34.50)$$

To je razširitev že spoznanega orbitalnega zakona za gibanje po krogu (19.19) na gibanje po elipsi. Obhodni čas je odvisen zgolj od velike osi. Vse elipse z enako veliko glavno osjo in s Soncem v gorišču imajo enak obhodni čas (in energijo), ne glede na to, kako so stisnjene. Namesto po krožnici premera $2R$ s Soncem v središču bi se Zemlja lahko gibala po neskončno stisnjeni elipsi z glavno osjo $2a = 2R$ in s Soncem v gorišču, torej na skrajnem koncu elipse. Obhodni čas bi bil obakrat enak. Če bi se torej Zemlja nenadoma zaustavila, bi se začela gibati okoli Sonca po neskončno ozki elipsi z osjo $2a = R$. Obhodni čas bi bil zato $(1/2)^{3/2} = 0,35$ -krat "daljši" kot sedanji in do Sonca bi potrebovala $1/2$ tega časa, torej 65 dni. Mesec pa bi padel na Zemljo v 5 dneh.

Težek planet Če je planet težek, postavimo izhodišče koordinatnega sistema v masno središče Sonca in planeta. Iz tega izhodišča raste vektor \mathbf{r}_1 do Sonca in vektor \mathbf{r}_2 do planeta. Vektorja ležita na zveznici obeh teles. Velja seveda $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$. Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ kaže smer in razdaljo od telesa 1 (Sonca) do telesa 2 (planeta). Iz obeh enačb sledi

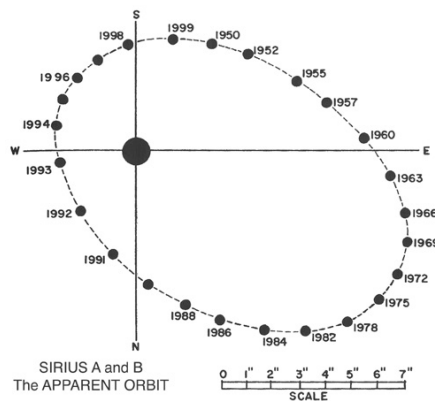
$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (34.51)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Vrtilna enačba sedaj vsebuje vsoto dveh členov in gibalna prav tako. Člene, ki vsebujejo \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 izrazimo z \mathbf{r} in dobimo enačbi $L = \mu r^2 \varphi'$ ter $E = (\mu/2)(r'^2 + r_2 \varphi') - \alpha/r$, pri čemer je $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. To sta popolnoma enaki enačbi, kot smo ju že spoznali, le da zdaj opisujeta gibanje fiktivne točke z *reducirano maso* μ okrog masnega središča. Seveda so tudi vse rešitve teh enačb enake kot prej. Izračunani vektor $\mathbf{r}(\varphi)$ torej kaže lego fiktivne mase glede na masni center. S tem sta določena tudi aktualna vektorja \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 , eden v smeri \mathbf{r} in drugi v nasprotni smeri. Obhodni čas po elipsi z velikim polmerom $a = a_1 + a_2$ tako znaša

$$\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{k(m_1 + m_2)}. \quad (34.52)$$

Masa zvezd Pri mnogih zvezdah opazimo, da se gibljejo druga okrog druge in se preko daljšega časovnega obdobja, recimo stoletja, vrnejo v začetno lego. To so *dvojne zvezde*. Če merimo in rišemo relativno lego "druge" (temnejše) zvezde glede na "prvo" (svetlejšo), dobimo elipso, njen veliki kotni premer in njen obhodni čas.



Slika 34.15 Relativno gibanje dvozvezdja. Prikazana je lega temne zvezde Sirij B glede na svetlo zvezdo Sirij A. Hodograf je elipsa. Svetla zvezda ni v gorišču elipse, kar je znak, da je ta nagnjena. (Sol Company)

Če predpostavimo, da leži ravnina elipse pravokotno na našo smer gledanja, postopamo takole. — S paralakso ali kako drugače izmerimo oddaljenost dvozvezdja in iz kotnega premera elipse izračunamo njen dolžinski premer. — Iz znanega obhodnega časa in velikega polmera izračunamo $m_1 + m_2$. — V elipsi določimo lego gorišča in s tem razmerje polmerov a_1/a_2 , ki je enako

m_2/m_1 . — Iz znane vsote in razmerja mas izračunamo posamezni masi. Tako merimo maso zvezd.

Kako vemo, da je elipsa res pravokotna? Tako, da je primarna zvezda v njenem gorišču in da velja zakon o enakih ploščinah. Če to ne drži, je elipsa nagnjena. Vidimo samo njeno projekcijo na zvezdno ozadje. Domnevamo, da se da pravo elipso rekonstruirati iz njene projekcije, vendar pričakujemo težko delo in se ga ne bomo lotili. □