28 Kompleksna števila

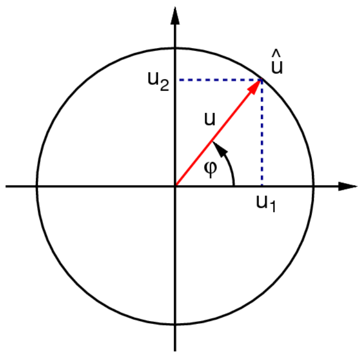
Skalarji in fazorji – Računske operacije – Imaginarna enota – Potenca in eksponencial – Kompleksne funkcije – Harmonične vrste – Primer spektralne analize – Kompleksne harmonične vrste – Harmonični integrali

28.1 Skalarji in fazorji

Zasuk nihala

Na vrvici obešena kroglica – težno nihalo – lahko niha sem in tja v navpični ravnini. Trenutni odmik kroglice iz njene ravnovesne lege opišemo z ustreznim relativnim številom, skalarjem: odmik v desno, na primer, je pozitiven in odmik v levo je negativen. Odmik nihala je torej količina, ki ima poleg velikosti še predznak.

Kroglica pa lahko tudi kroži v vodoravni ravnini; pri tem se njena projekcija na poljubni premer kroga spreminja. Trenutni zasuk nihala opišemo potem na dva načina: z dvema projekcijama – odmikoma u_1 in u_2 – na dva medsebojno pravokotna premera ali z velikostjo u in fazo φ. Zasuk nihala je torej količina, ki ima poleg velikosti še fazo. Odmik nihala je poseben primer zasuka za fazo 0 ali 180°.



Slika 28.1 Zasuk kot kompleksno število oziroma fazor.

Kompleksna števila ali fazorji

Na odmika u_1 in u_2, ki opisujeta zasuk, pogledamo kot na celoto in proglasimo: vsakršna dvojica relativnih števil (u_1, u_2) je *kompleksno število* $\hat{u}$ z *realno* komponento u_1 in *imaginarno* komponento u_2. Obenem definiramo še *absolutno vrednost* $|\hat{u}|$ in *fazo* $\mathrm{Arg}\,(\hat{u})$:

$$\begin{aligned}
&\hat{u} = (u_1, u_2) = (u\cos\varphi, u\sin\varphi) \qquad (28.1)\\
&\mathrm{Re}\,(\hat{u}) = u_1\\
&\mathrm{Im}\,(\hat{u}) = u_2\\
&|\hat{u}|^2 = u^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2\\
&\mathrm{Arg}\,(\hat{u}) = \varphi = \mathrm{atan}\,\frac{u_2}{u_1}\,.
\end{aligned}$$

Ker ima kompleksno število poleg velikosti še fazo, mu bomo rekli tudi *fazor*. Poljuben fazor bomo označili s črkami $\hat{u}$, $\hat{v}$ in $\hat{w}$.

28.2 Računske operacije

Kompleksna števila (fazorji) so razširitev relativnih števil (skalarjev). Slednja vključujejo kot pare, katerih imaginarna komponenta je enaka nič. Računanje s fazorji hočemo zato definirati tako, da bo pomen računskih operacij nad skalarji ohranjen. Razviti hočemo kompleksni račun (BOMBELLI, EULER, GAUSS).

Množenje fazorja s skalarjem

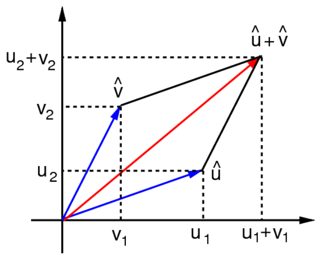
Naj ima fazor imaginarno komponento enako nič. Tedaj je "enakopraven" navadnemu realnemu odmiku. Množenje takega odmika s pozitivnim ulomkom pomeni njegov razteg ali skrčitev, z negativnim pa hkrati še obrat njegove usmeritve. Zato definiramo tako tudi za kompleksni zasuk:

$$c\hat{u} = (cu_1, cu_2)\,. \tag{28.2}$$

Seštevanje in odštevanje fazorjev

Seštevanje dveh realnih odmikov pomeni, da na konec prvega nataknemo začetek drugega in oba nadomestimo s premikom, ki sega od začetka prvega do konca drugega. Zato definiramo tako tudi za kompleksne zasuke:

$$\hat{u} + \hat{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)\,. \tag{28.3}$$



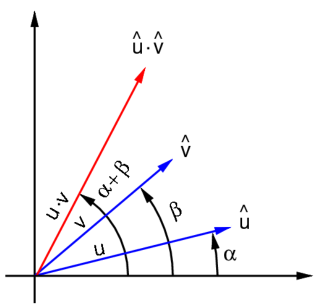
Slika 28.2 Seštevanje fazorjev po paralelogramskem pravilu.

To je že znano paralelogramsko pravilo za seštevanje premikov (9.7). Odštevanje je obratna operacija k seštevanju in ga tako tudi definiramo: znake za seštevanje (+) nadomestimo z znaki za odštevanje (−).

Množenje in deljenje fazorjev

Fazor $u\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$ opisuje razteg realnega enotnega premika za faktor u in zasuk za kot φ. To nas sili, da množenje fazorja $\hat{u} = u\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ s fazorjem $\hat{v} = v\,(\cos\beta, \sin\beta)$ definiramo kot zasuk prvega za argument drugega in hkratni ustrezni razteg:

$$\hat{u}\,\hat{v} = uv\,(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))\,. \tag{28.4}$$



Slika 28.3 Množenje fazorjev po sučnem pravilu. Prvi fazor zasučemo za fazo drugega fazorja in ga pomnožimo z njegovo velikostjo.

Deljenje je obratna operacija od množenja, zato smo prisiljeni definirati

$$\hat{u}/\hat{v} = (u/v)\,(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))\,. \tag{28.5}$$

Množenje in deljenje smo definirali z absolutnimi velikostmi in argumenti operandov. Ugodno bi bilo vedeti, kako se to zapiše s komponentami. Neposredni račun pokaže:

$$\begin{aligned} \hat{u}\hat{v} &= (u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1) \\ \hat{u}/\hat{v} &= (u_1 v_1 + u_2 v_2, u_2 v_1 - u_1 v_2)\,. \end{aligned} \tag{28.6}$$

Z vpeljanimi definicijami ostanejo v veljavi vsa računska pravila, ki veljajo za skalarje (in še prej za naravna števila) (2.1): vsota in produkt dveh fazorjev sta komutativna in asociativna, produkt pa je distributiven glede na vsoto.

28.3 Imaginarna enota

Enotni fazorji

Definiciji za vsoto in produkt omogočata, da poljuben fazor zapišemo v obliki

$$\hat{u} = u_1 \cdot (1, 0) + u_2 \cdot (0, 1)\,. \tag{28.7}$$

Številska para $(1, 0)$ in $(0, 1)$ poimenujemo *realna enota* in *imaginarna enota*. Njuni velikosti sta, sledeč definiciji, enaki 1. Krajše zapišemo

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_1 + \mathrm{i} u_2 \\ \mathrm{i} &= (0, 1)\,. \end{aligned} \tag{28.8}$$

Imaginarna enota kot navidezni skalar

Realno enoto $(1, 0)$ torej zapišemo kar kot skalar 1, imaginarno enoto $(0, 1)$ pa kot "skalar" i. Ta zapis ima izjemno praktično vrednost. Če se delamo, da je imaginarna enota i kar navaden skalar, lahko vsako kompleksno število obravnavamo kot skalarni binom. Te pa igraje seštevamo, odštevamo, množimo in delimo! Če med računom pridelamo kvadrat ali kakšno višjo potenco imaginarne enote, upoštevamo, da velja, sledeč definiciji množenja, $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, torej

$$\mathrm{i}^2 = -1\,. \tag{28.9}$$

Rezultat, ki ga dobimo, je prav tak, kot če bi mukoma računali s pari števil po osnovnih definicijah. Zgled pove to najbolje. Namesto takole: $(3, 5) \cdot (2, 4) = (3 \cdot 2 - 5 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2) = (-14, 22)$ računamo raje takole: $(3 + 5\mathrm{i})(2 + 4\mathrm{i}) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5\mathrm{i} + 4\mathrm{i} \cdot 3 + 4\mathrm{i} \cdot 5\mathrm{i} = 6 + 22\mathrm{i} + 20\mathrm{i}^2 = -14 + 22\mathrm{i}$. Razlika je očitna.

Množenje skalarja z imaginarno enoto nazorno pomeni, da skalar zavrtimo za kot 90° v nasprotni smeri urinega kazalca. Dvakratno množenje z imaginarno enoto torej zavrti skalar za 180°, to je, spremeni mu predznak. To velja tudi za množenje kateregakoli fazorja z imaginarno enoto.

Konjugirana kompleksna števila

Velikost kompleksnega števila $\hat{u}$ je podana, kot vemo, takole: $|\hat{u}|^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2$. To je enako produktu $(u_1 + \mathrm{i}u_2)(u_1 - \mathrm{i}u_2)$. Drugi faktor je očitno enak prvemu, le predznak imaginarne enote ima nasproten. Rečemo, da je prvemu *konjugiran*, in zapišemo

$$\hat{u}^* = u_1 - \mathrm{i}u_2 \qquad (28.10)$$
$$|\hat{u}|^2 = \hat{u}\hat{u}^* .$$

Konjugirano vrednost fazorja si nazorno predstavljamo kot njegovo preslikavo preko realne osi.

28.4 Potenca in eksponencial

Fazor kot baza potence

Naravno potenco fazorja definiramo enako kot naravno potenco skalarja:

$$\hat{u}^n = \hat{u} \cdot \hat{u} \dots \hat{u} . \qquad (28.11)$$

To zaradi (28.4) ne pomeni nič drugega kot

$$\hat{u}^n = u^n (\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi) . \qquad (28.12)$$

Namesto naravnega eksponenta n si v zapisanem obrazcu mislimo recipročni naravni eksponent (koren) $1/n$, ulomni eksponent $p = n/m$ ali relativni eksponent $\pm p$. Ali obrazec za takšne skalarne eksponente še vedno velja, je nesmiselno vprašati, saj potenciranja fazorja z "nenaravnim" eksponentom s še nismo definirali. Pa proglasimo prav ta obrazec za definicijo! Torej:

$$\hat{u}^s = u^s (\cos s\varphi + \mathrm{i} \sin s\varphi) . \qquad (28.13)$$

Paziti moramo le na naslednje. Ker sta sinus in kosinus periodični funkciji, je treba namesto izraza φ/n računati izraze $(\varphi + k2\pi)/n$, $k = 0, 1, 2 \dots n-1$. "Nenaravne" potence fazorja so torej večlične.

Kvadratni koren iz negativnih skalarjev doslej ni bil določen, to je, ne obstajajo skalarji – ne pozitivni ne negativni –, katerih kvadrat bi bil negativni skalar. Če pa na skalar $-p$ pogledamo kot na ekvivalentni fazor $(-p, 0)$, potem je kvadratni koren iz njega prav lahko najti: $(-p, 0)^{1/2} = p^{1/2} (\cos \pi/2 + \mathrm{i} \sin \pi/2) = \mathrm{i}p^{1/2}$. Kvadratni koreni negativnih skalarjev so (imaginarna) kompleksna števila.

Fazor kot eksponent potence

Kako pa bi razširili eksponencial (potenco z bazo e) od skalarnega argumenta na kompleksnega? Stisnimo zobe in razvijmo funkcijo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ – za katero ne vemo, kaj pomeni! – v potenčno vrsto, kakor da bi bil argument $\mathrm{i}\varphi$ skalar! Pri tem upoštevajmo pravilo $\mathrm{i}^2 = -1$, s čimer v vrsti ostanejo samo gole vrednosti i. Naredimo še en greh in zberimo skupaj vse tiste člene, ki ne vsebujejo i, ter skupaj one, ki i vsebujejo. Iz slednjih izpostavimo i in dobimo vsoto dveh vrst. Vzhičeno ugotovimo, da sta to potenčni vrsti za kosinus in sinus, torej

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi . \qquad (28.14)$$

Če naj si eksponentna funkcija zasluži svoje ime, bi moralo veljati še

$$\mathrm{e}^{\hat{u}} = \mathrm{e}^{u_1 + \mathrm{i}u_2} = \mathrm{e}^{u_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2} = \mathrm{e}^{u_1}\,(\cos u_2 + \mathrm{i}\sin u_2)\,. \tag{28.15}$$

Pri $u_2 = 0$ se pridelani kompleksni eksponencial zares reducira v skalarnega. No, pa proglasimo ta rezultat, do katerega smo prišli s stisnjenimi zobmi, za definicijo kompleksnega eksponenciala! To gotovo lahko naredimo, kajti s tem nič ne vplivamo na dosedanja dejstva o skalarnem eksponencialu. Pravo vprašanje pa je seveda tole: ali iz sprejete definicije sledijo takšna pravila za računanje s kompleksnimi eksponenciali, ki so enaka računskim pravilom za skalarne eksponenciale? Kratki računi res pokažejo, da veljajo osnovna pravila $\exp\hat{u}\cdot\exp\hat{v} = \exp(\hat{u}+\hat{v})$; $\exp\hat{u}/\exp\hat{v} = \exp(\hat{u}-\hat{v})$; in $\exp\hat{u}^{\hat{v}} = \exp(\hat{u}\cdot\hat{v})$. Sprejeta definicija je torej dobra.

Najlepša enačba

Če za argument v eksponencialu izberemo $\mathrm{i}\pi$, dobimo presenetljivo enačbo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$. V njej je medsebojno povezanih pet najpomembnejših števil: 0, 1, π, e in i, povezujejo jih pa tri osnovne operacije: seštevanje, množenje in potenciranje. Za povrh je vključen še znak enakosti. Mnogi imajo to enačbo za najlepšo od vseh v matematiki.

28.5 Kompleksne funkcije

Kompleksni zapis kotnih funkcij

Enačba $\exp\mathrm{i}\varphi = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ kaže, kako je eksponentna funkcija (imaginarnega argumenta) izražena s kotnimi funkcijami. Ali je možno tudi obratno, torej izraziti kakšno kotno funkcijo z eksponentnimi funkcijami? Za $\varphi \to -\varphi$ se enačba glasi $\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$. Obe enačbi seštejemo in dobimo

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\,. \tag{28.16}$$

Če enačbi odštejemo, pa pridelamo

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\,. \tag{28.17}$$

Uspeli smo. Za izračunavanje numeričnih vrednosti kotnih funkcij, recimo za izračun $\cos 3$ ali $\sin 3$, izpeljani enačbi sicer nista uporabni, saj se reducirata v identiteto. Na primer: $\cos 3 = [\exp\mathrm{i}3 + \exp(-\mathrm{i}3)]/2 = [(\cos 3 + \mathrm{i}\sin 3) + (\cos 3 - \mathrm{i}\sin 3)]/2 = \cos 3$. Sta pa zelo uporabni pri dokazovanju trigonometričnih identitet, recimo znamenite identitete $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$. Računanje z eksponentnimi funkcijami je namreč mnogo lažje od računanja s kotnimi funkcijami.

Kotne funkije kompleksnega argumenta

Nič nam ne brani, da razširimo definicijo kotnih funkcij tudi na kompleksne argumente:

$$\cos\hat{u} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{u}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{u}}}{2} \qquad \sin\hat{u} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{u}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{u}}}{2\mathrm{i}}\,. \tag{28.18}$$

S tem postaneta funkciji sinus in kosinus kompleksni, to je, njuna zaloga vrednosti so kompleksna števila. Na primer: $\cos(4\mathrm{i}+3) = [\exp(-4+3\mathrm{i}) + \exp(4-3\mathrm{i})]/2 = [\exp(-4)\exp 3\mathrm{i}]/2 + [\exp 4\exp(-3\mathrm{i})]/2 = [\exp(-4)/2](\cos 3 + \mathrm{i}\sin 3) + [\exp(+4)/2](\cos 3 - \mathrm{i}\sin 3) = [\exp(-4) + \exp 4)]\cos 3\,/\,2 + \mathrm{i}\,[\exp(-4) - \exp 4]\sin 3\,/\,2$, kar je kompleksno število.

Kompleksne funkcije skalarja

Na izraz $\hat{u} = u\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ lahko pogledamo kot na kompleksno funkcijo $\hat{u}$ skalarnega argumenta φ: vsaki vrednosti φ pripada natanko določena vrednost $\hat{u}$. Splošno funkcijo te vrste lahko definiramo kot

$$\hat{u}(t) = u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t)\,, \tag{28.19}$$

recimo $\hat{u} = at + \mathrm{i}bt^2$. Pojavi se vprašanje, ali in kako lahko takšne funkcije odvajamo in integriramo. Pravzaprav ni kaj dosti premišljevati. Odvod definiramo kot

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \tag{28.20}$$

in integral kot

$$\int \hat{u}\,\mathrm{d}t = \int u_1\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int u_2\,\mathrm{d}t\,. \tag{28.21}$$

Ko členoma odvajamo $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi)\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dobimo $-\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi$, kar je enako $\mathrm{i}\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Zapisano z eksponencialom to pomeni $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Vidimo, da kompleksni eksponencial odvajamo natanko tako kot skalarnega, pri čemer obravnavamo enoto i kot navaden skalar. Podobno velja za integriranje.

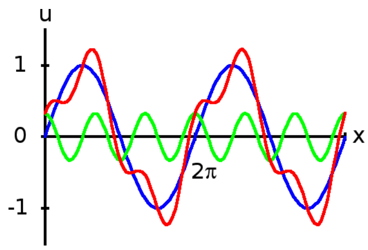
Kompleksne funkcije fazorja

Na izraze $\hat{w} = c\hat{u}$, $\hat{w} = \hat{u}^2$, $\hat{w} = \mathrm{e}^{\hat{u}}$, $\hat{w} = \cos\hat{u}$ ali $\hat{w} = \sin\hat{u}$ lahko pogledamo kot na kompleksne funkcije fazorskega argumenta. Vsaki vrednosti $\hat{u}$ pripada natanko določena vrednost $\hat{w}$. Splošno funkcijo te vrste zapišemo kot $\hat{w} = f(\hat{u})$. Očitno je, da je to preslikava točk (in s tem krivulj) iz ene ravnine v drugo ravnino. Podrobnejše obravnavanje takih funkcij, vključno z njihovim odvajanjem, integriranjem in razvojem v potenčne vrste, pa prepustimo drugim, ki to potrebujejo ali jih zanima.

28.6 Harmonične vrste

Superpozicija harmonikov

Struna lahko niha harmonično s (krožnimi) frekvencami ω, 2ω, 3ω itd. Osnovno nihanje se ponavlja po vsaki periodi $T = 2\pi/\omega$, naslednje po periodi $T_2 = 2\pi/2\omega$, pa tudi po periodi $T = 2T_2$, itd. Aktualno periodično nihanje strune je sestavljeno iz vsote izbranih harmoničnih nihanj. S primerno izbiro harmoničnih komponent je možno pridelati zelo različne periodične funkcije.



Slika 28.4 Vsota dveh sinusoid. Modra je $\sin x$, zelena je $(1/3)\cos 3x$, rdeča je vsota. Prikazan je interval med 0 in 4π. Če sta frekvenci v celoštevilčnem razmerju, je rezultat periodična funkcija.

To nas navaja na misel, da se da vsaka (ne preveč divja) periodična funkcija s periodo T zapisati v obliki *harmonične vrste* (FOURIER)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,. \tag{28.22}$$

Pri tem je $\omega = 2\pi/T$. Za nekatere funkcije je morda dovolj le nekaj členov, za druge pa je potrebnih neskončno mnogo.

Razvoj funkcije v harmonično vrsto

Če poznamo amplitude a_n in b_n, lahko funkcijo $f(t)$ zlahka izračunamo. Kaj pa obratno? Če poznamo funkcijo, ali lahko izračunamo amplitude?

Razmišljamo takole. Preko periode T ima vsak sinus enako mnogo hribov kot dolin; njegov integral je zato nič. Podobno velja za kosinuse. Integral vseh členov, razen konstantnega, je zato nič, in integral funkcije mora zato biti enak integralu konstantnega člena:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{28.23}$$

Če pomnožimo harmonično vrsto (28.22) na levi in desni strani s členom $\cos k\omega t$, pridelamo na desni strani vsoto "istoimenskih" produktov $\cos n\omega t \cdot \cos k\omega t$ in "raznoimenskih" produktov $\sin n\omega t \cdot \cos k\omega t$. Potem integriramo vsako stran preko periode T. "Raznoimenski" integrali so vsi enaki nič. "Istoimenski" integrali pa so tudi enaki nič, če $n \neq k$; le v enem samem primeru, ko $n = k$, znaša integral $T/2$. Velja torej

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{28.24}$$

Na podoben način ugotovimo še

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{28.25}$$

Integriranje poteka preko periode T. Ta je seveda lahko poljubno zamaknjena. Namesto spodnje meje 0 lahko zato izberemo poljubno mejo t_0 in integriramo med t_0 in $t_0 + T$.

Vsota amplitud

Energija harmoničnega nihanja nihala je sorazmerna s kvadratom amplitude (21.19). To nas navede na izračun integrala f^2 preko periode T. Morda bomo odkrili kaj zanimivega? Trigonometrično vsoto kvadriramo in pridelamo množico mešanih produktov med sinusi in kosinusi. Vsi produkti razen kvadratov sinusov in kosinusov so enaki nič in velja:

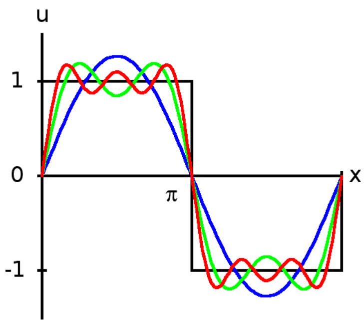
$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)\,. \tag{28.26}$$

Povprečna vrednost kvadrata funkcije je torej enaka vsoti kvadratov posamičnih amplitud.

28.7 Primer spektralne analize

Škatlasta funkcija

Za zgled razvijmo v harmonično vrsto, to je *spektralno analizirajmo*, "škatlasto" periodično funkcijo, ki je na prvi polovici periode enaka $f(t) = 1$ in na drugi polovici enaka $f(t) = -1$. Upamo, da funkcija zaradi nezveznih skokov ni predivja za legitimni razvoj.



Slika 28.5 Škatlasta funkcija in njeni harmoniki. Prvi harmonik je moder, vsota prvih dveh je zelena in vsota prvih treh je rdeča.

Integrale $f(t)\cos n\omega t$ in $f(t)\sin n\omega t$ preko cele periode razdelimo na dva dela: preko prve polovice in preko druge polovice, jih zlahka integriramo in dobimo $f(t) = (4/\pi)\,[(1/1)\sin \omega t + (1/3)\sin 3\omega t + (1/5)\sin 5\omega t + \ldots]$. Funkcija je liha in je zato sestavljena iz samih sinusov.

Pri $t = T/4$ znaša $f(t) = 1$ in $\omega t = (2\pi/T)(T/4) = \pi/2$, zato se vrsta zapiše kot $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \ldots$ To je že znana vrsta (17.10). Povprečje kvadrata funkcije je 1 in je enako vsoti kvadratov spektralnih koeficientov, iz česar sledi

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \tag{28.27}$$

Obe številski vrsti lahko izračunamo in ugotovimo, da res držita. To je pokazatelj (če že ne dokaz), preko posledic, da je spektralna analiza "skokovitih" funkcij veljavna. Na podoben način lahko pridelamo mnoge zanimive številske vrste.

28.8 Kompleksne harmonične vrste

Kompleksna vrsta

Če trigonometrične funkcije zapišemo v obliki $\cos\omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ in $\sin\omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$, se razvoj v harmonično vrsto zapiše prav na kratko:

$$f(t) = \mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_n \, e^{in\omega t} \tag{28.28}$$

$$\hat{A}_0 = a_0$$

$$\hat{A}_n = \frac{1}{2}\,(a_n - ib_n)$$

$$\hat{A}_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + ib_n)$$

iz česar sledi tudi

$$\hat{A}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{28.29}$$

in še

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{A}_n|^2 \,. \tag{28.30}$$

To je kompleksni zapis harmonične vrste. Tak zapis je ugoden zato, ker je integriranje eksponentnih funkcij, čeravno kompleksnih, praviloma lažje od integriranja trigonometričnih funkcij.

28.9 Harmonični integrali

Zvezni spekter

Kaj pa, če funkcija ni periodična, to je, če je njena perioda neskončna? Naj bo perioda T zelo dolga: pomislimo na enkraten brenk na struno, ki se ponovi le vsako uro. Tedaj je osnovna frekvenca $\omega_0 = 2\pi/T$ zelo majhna. Posamezne frekvence $\omega = n\omega_0$ so zato razporejene zelo na gosto. Pričakujemo, da se amplitude $\hat{A}_n$ potem z naraščanjem n le počasi spreminjajo. Število spektralnih črt dn na intervalu $d\omega$ znaša $dn = d\omega/\omega_0$. Vsota amplitud na tem intervalu je $\hat{A}_n\, dn = (\hat{A}_n/\omega_0)\, d\omega$. Definiramo *gostoto spektra* kot $\hat{A}_n/\omega_0 = \hat{A}(\omega)$, pa lahko vsoto zapišemo z integralom:

$$f(t) = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \,. \tag{28.31}$$

Izračun spektra

Gostoto zveznega spektra razberemo iz enačbe za diskretne spektralne koeficiente. Periodo T zapišemo kot $2\pi/\omega_0$, delimo obe strani z ω_0 in pridelamo

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,. \tag{28.32}$$

Podobno dobimo še povezavo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{A}(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{28.33}$$

Simetrična transformacija

Realna funkcija $f(t)$ in kompleksna funkcija $\hat{A}(\omega)$ sta torej medsebojno povezani. Rečemo, da je ena harmonična transformacija druge. Tistim, ki radi posplošujejo in imajo radi simetrijo, se ob tem porodi naslednja misel: zakaj ne bi bili obe funkciji kompleksni in zakaj ne bi bil predintegralski faktor pri obeh transformacijskih enačbah isti, najbolje kar enak ena? Če stisnemo zobe in proglasimo $f(t)$ za kompleksno funkcijo $\hat{f}(t)$; če namesto ω pišemo $2\pi\nu$, torej $d\omega = 2\pi d\nu$; in če zapišemo še $2\pi A(\omega) = B(\nu)$, s tem pridelamo par

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu \tag{28.34}$$

$$\hat{B}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

ter povezavo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{B}(\nu)|^2\, d\nu\,. \tag{28.35}$$

To je iskana transformacija v "unitarni" obliki. Zapisano gotovo velja, če $\hat{f}(t) = (f(t), 0)$. Da pa velja širše, nas prepričuje simetrija. Pustimo se ji prepričati. □