16 Diferenciali

Odvod – Diferencial – Odvodi osnovnih funkcij – Odvod obratne funkcije – Odvod sestavljene funkcije – Razvoj v potenčno vrsto – Razvoj osnovnih funkcij – Maksimum in minimum

16.1 Odvod

Pri risanju grafov smo večkrat omenili, da so ti bolj ali manj strmi. Kaj to pomeni kvalitativno, je znano vsakomur že iz otroških let. Morda pa lahko strmino grafa opišemo kvantitativno, to je s številom?

Strmina premice

Sprehodimo se v mislih po poševni premici skozi izhodišče koordinatnega sistema, torej po grafu funkcije $u = ax$. Ko pridemo nad koordinato x, se znajdemo na višini $u(x) = ax$. Če se iz te točke premaknemo naprej nad koordinato $x + h$, dosežemo višino $u(x + h) = a(x + h)$. Opravljeni premik je bolj ali manj "strm". Kvantificiramo ga s količnikom $[u(x + h) - u(x)]/h = a$, ki opisuje *strmino* premice pri koordinati x. Količnik je lahko večji ali manjši, pozitiven ali negativen, odvisno pač od tega, kakšna je premica. Pri tem je vseeno, za kakšen korak h gremo naprej: količnik je zmeraj enak. Prav tako je vseeno, nad katero koordinato x smo: povsod je količnik enak. Premica je povsod enako strma. Zato je tudi premica.

Strmina parabole

Zdaj pa se sprehodimo po kvadratni paraboli s temenom v koordinatnem izhodišču, torej po grafu funkcije $u = ax^2$. Ko se iz koordinate x premaknemo nad koordinato $x + h$, se višina spremeni iz $u(x) = ax^2$ v $u(x + h) = a(x + h)^2$. Izračunani količnik $[u(x + h) - u(x)]/h = 2ax + ah$ pa je zdaj odvisen od tega, kolikšen je korak h. S tem strmina žal ni enolično določena. Kako si pomagati? Tako, da zmanjšamo korak h na toliko, da postane člen ah mnogo manjši od člena $2ax$ in ga zanemarimo. Tedaj je strmina enaka $2ax$. Očitno ni v vsaki točki enaka. To seveda kaže graf sam.

Odvod funkcije

Kar smo ugotovili o strmini linearne in kvadratne funkcije, posplošimo na vsakršno funkcijo $u(x)$. Najprej označimo izraz "strmina funkcije u" s simbolom u'. Ker je izraz "strmina" preveč vezan na prostorsko navpičnico, ga raje nadomestimo z bolj nevtralnim izrazom *odvod*. Kako močno se funkcija $u(x)$ okrog neke vrednosti x spreminja, potem povemo takole:

$$u' = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{u(x + \mathrm{d}x) - u(x)}{\mathrm{d}x} \,. \tag{16.1}$$

To je definicija odvoda funkcije in s tem začetek razvoja diferencialnega računa (LEIBNIZ, EULER). Dosedanjo oznako h smo nadomestili z boljšo oznako $\mathrm{d}x$, ki naj pomeni spremembo koordinate x. Da pa moramo to spremembo v izračunanem kvocientu napraviti dovolj majhno, opozorimo z oznako $\lim \mathrm{d}x \to 0$.

Odvod funkcije v izbrani točki ni nič drugega kot smerni koeficient premice, ki se krivulje tam dotika, *tangente*. Kadar je funkcija podana grafično, ga približno določimo z risanjem. Kadar je podana z enačbo, pa ga izračunamo po zgledu za linearno in kvadratno funkcijo. Odvod funkcije je definiran v vsaki dovolj pohlevni točki – razen v polu, skoku ali kolenu – in je zato tudi sam funkcija. Lahko ga nadalje odvajamo. Tako dobimo drugi odvod u'' in še višje odvode. Drugi odvod opisuje, kako se spreminja strmina tangente, to je, kako je graf ukrivljen.

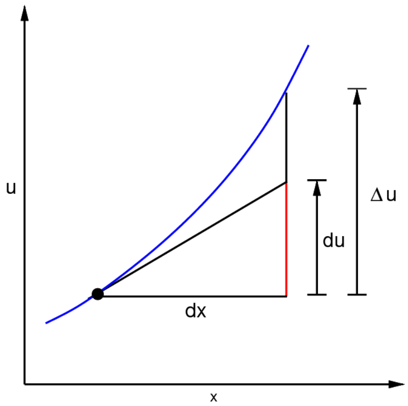
16.2 Diferencial

Prirast tangente in funkcije

Pri spremembi neodvisne spremenljivke za $\mathrm{d}x$ se funkcija spremeni za $\Delta u = u(x + \mathrm{d}x) - u(x)$. Ustrezni navpični prirastek na tangenti poimenujemo *diferencial* $\mathrm{d}u$ funkcije in znaša

$$\mathrm{d}u = u' \cdot \mathrm{d}x\,. \tag{16.2}$$

Zaradi poenotenega izražanja bomo prirastek $\mathrm{d}x$ poimenovali diferencial argumenta.



Slika 16.1 Odvod in diferencial funkcije. Odvod v izbrani točki je smerni koeficient tangente v tej točki. Diferencial funkcije je navpični prirastek te tangente.

Diferencialni količnik

Vpeljava diferenciala funkcije omogoča, da izrazimo odvod funkcije kot količnik

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'\,. \tag{16.3}$$

To je pravi količnik dveh poljubno velikih diferencialov. Pri dovolj majhnem $\mathrm{d}x$ je diferencial funkcije $\mathrm{d}u$ praktično enak spremembi funkcije Δu. Tedaj v praksi med obojima ne delamo razlike in obravnavamo $\mathrm{d}u$ kot spremembo funkcije. Tudi drugi odvod in višje odvode lahko zapišemo z diferenciali in sicer takole:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = u''\,. \tag{16.4}$$

16.3 Odvodi osnovnih funkcij

Izračunajmo odvode osnovnih funkcij, ki jih že poznamo! Odvode bomo računali po definiciji, to je iz spremembe funkcije pri majhnem povečanju argumenta.

Konstanta

Najpreprostejša funkcija, če ji sploh lahko tako rečemo, je konstanta. Njen graf je ravna črta brez nagiba. Njen odvod je torej nič:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, c = 0\,. \tag{16.5}$$

Naravna potenca

Naravno potenco povečanega argumenta $(x+h)^n$ razvijemo po binomskem pravilu v polinom (15.3), odštejemo začetno vrednost x^n, delimo s h, zanemarimo vse člene, ki vsebujejo h, in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n = nx^{n-1}\,. \tag{16.6}$$

Skalarna potenca

Skalarno potenco povečanega argumenta $(x+h)^s$ preoblikujemo v $x^s\,(1+h/x)^s$, jo razvijemo v binomsko vrsto (15.4) in po že opisanem postopku dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^s = sx^{s-1}\,. \tag{16.7}$$

Eksponentna funkcija

Eksponentno funkcijo povečanega argumenta $\mathrm{e}^{(x+h)}$ zapišemo kot produkt $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^h$ ter nato e^h izrazimo z eksponentno vrsto (15.7). Dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,. \tag{16.8}$$

Zanimivo je, da je odvod funkcije enak funkciji sami. Eksponentna funkcija se pri odvajanju ne spremeni.

Kotne funkcije

Funkcijo sinus povečanega argumenta $\sin(x+h)$ razcepimo po izreku za sinus vsote dveh kotov (15.15). Za majhen h potem aproksimiramo, sklicujoč se na grafe kotnih funkcij, $\cos h \approx 1$ in $\sin h \approx h$. Podobno obdelamo funkcijo kosinus in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \sin x &= \cos x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \cos x &= -\sin x\,. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Dvakratno odvajanje prevede sinus nazaj v sinus, vendar z negativnim predznakom. Podobno velja za kosinus.

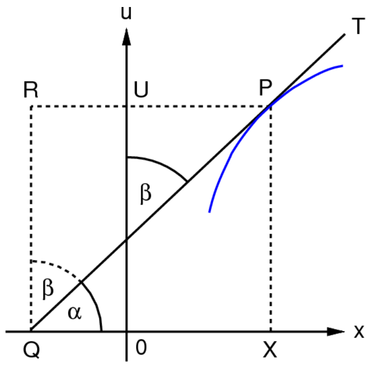
16.4 Odvod obratne funkcije

Dva odvoda

Vsako dovolj pohlevno funkcijo $u(x)$ je možno zapisati kot obratno funkcijo $x(u)$, recimo $u = x^2$ kot $x = u^{1/2}$. Funkcija in njena obratna funkcija sta, kot vemo, po definiciji povezani takole: če na argument delujemo s funkcijo in nato na dobljeni rezultat še z obratno funkcijo, dobimo začetni argument. Morda sta tudi odvoda $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ med seboj nekako povezana? Ker velja za omenjeno funkcijo $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = 1/2u^{1/2} = 1/2x$, domnevamo, da velja splošno

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 \,. \tag{16.10}$$

Odvod obratne funkcije je recipročna vrednost odvoda prvotne funkcije. Domnevo dokažemo takole. Tangenta na krivuljo $u(x)$ tvori z osjo x kot α in z osjo u kot β, torej $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = \tan\alpha$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = \tan\beta$. Velja: $\tan\alpha = \mathrm{PX}/\mathrm{XQ}$, $\tan\beta = \mathrm{PR}/\mathrm{RQ} = \mathrm{XQ}/\mathrm{PX}$, zato $\tan\alpha\tan\beta = 1$.



Slika 16.2 Shema za izrek o odvodu obratne funkcije. Tangenta T oklepa z absciso kot α in z ordinato kot β. Tangens prvega kota je odvod funkcije in tangens drugega kota je odvod obratne funkcije.

Logaritemska funkcija

Izrek o odvodu obratne funkcije omogoča, da izračunamo odvod logaritemske funkcije $u = \ln x$. Ta je namreč obratna funkcija k $\mathrm{e}^u = x$, torej $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 1/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}u) = 1/\mathrm{e}^u = 1/x$, to je:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} \,. \tag{16.11}$$

Obratne kotne funkcije

Podobno izračunamo tudi odvode obratnih kotnih funkcij:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{asin} x &= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{acos} x &= -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \,. \end{aligned} \tag{16.12}$$

16.5 Odvod sestavljene funkcije

Linearna in kvadratna funkcija ter polinomi nasploh so sestavljeni iz potenc različnih stopenj, pomnoženih s skalarji, in seštetih. Še bolj zamotane funkcije dobimo kot količnike polinomov. Pojavi se vprašanje, kako odvajati takšne in podobne sestavljene funkcije.

Vsota, produkt in kvocient

Naj bo $A = cu(x)$. Ko naraste $x \to x + \mathrm{d}x$, naraste $u \to u + \mathrm{d}u$ in $A \to A + \mathrm{d}A$. Velja $A + \mathrm{d}A = c(u + \mathrm{d}u) = cu + c\mathrm{d}u$. Odštejemo enačbo $A = cu$, dobimo $\mathrm{d}A = c\mathrm{d}u$, delimo z $\mathrm{d}x$ in doženemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,. \tag{16.13}$$

Vsoto funkcij $A = u(x) + v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u) + (v + \mathrm{d}v)$, odštejemo $A = u + v$, dobimo $\mathrm{d}A = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$, delimo z $\mathrm{d}x$ in ugotovimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u \pm v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} . \tag{16.14}$$

Produkt funkcij $A = u(x)v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u)(v + \mathrm{d}v)$, križem pomnožimo, zanemarimo produkt dveh diferencialov, odštejemo $A = uv$, delimo z $\mathrm{d}x$ in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} . \tag{16.15}$$

Kvocient funkcij $A = u(x)/v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u)/(v + \mathrm{d}v)$. Števec in imenovalec pomnožimo z $(v - \mathrm{d}v)$, križem pomnožimo, zanemarimo produkte dveh diferencialov, odštejemo $A = u/v$ ter najdemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\mathrm{d}u/\mathrm{d}x \cdot v - u \cdot \mathrm{d}v/dx}{v^2} . \tag{16.16}$$

Posredna funkcija

Na poseben način sestavljeno funkcijo $u(x)$ dobimo, če njen argument x nadomestimo z drugo funkcijo $v(x)$ ter pridelamo $u(v(x))$. Dobra primera sta $\exp(kx)$ ali $\sin(kx + b)$. Kako odvajati takšno funkcijo? Vemo, da diferencialu $\mathrm{d}x$ ustreza diferencial $\mathrm{d}v$, in njemu diferencial $\mathrm{d}u$. Velja $\mathrm{d}u = u'(v) \cdot \mathrm{d}v$ in $\mathrm{d}v = v'(x) \cdot \mathrm{d}x$. Vstavitev $\mathrm{d}v$ iz druge enačbe v prvo enačbo pove:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} . \tag{16.17}$$

To je verižno pravilo in z njim zmoremo odvajati tudi zelo zapletene funkcije.

16.6 Razvoj v potenčno vrsto

Funkcijo $1/(1 - x)$ znamo izraziti kot geometrijsko vrsto (15.1). Potenco binoma $(1 + x)^s$ smo zapisali kot binomsko vrsto (15.4). Obe omenjeni vrsti sta potenčni. Kaj ne bi bilo čudovito, če bi lahko katerokoli funkcijo zapisali s potenčno vrsto? Predpostavimo torej, da velja $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ Koeficienti a_i so seveda odvisni od tega, kakšna, konkretno, je funkcija $u(x)$. Drugačna funkcija, drugačni koeficienti.

Koeficienti členov

Vemo tole. Pri $x = 0$ mora veljati $u(0) = a_0$. S tem je koeficient a_0 že določen. Nato odvajamo funkcijo in dobimo $u'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots$ Pri $x = 0$ mora veljati $u'(0) = a_1$ in s tem je določen koeficient a_1. Tako nadaljujemo z zaporednim odvajanjem in določimo vse koeficiente:

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1!} x + \frac{u''(0)}{2!} x^2 + \ldots \tag{16.18}$$

Koeficienti so odvisni le od vrednosti funkcije in njenih odvodov v točki $x = 0$. Zato rečemo, da smo funkcijo *razvili* okrog te točke. Seveda jo lahko razvijemo tudi okrog kake druge točke $x = a$; potem dobimo

$$u(a+h) = u(a) + \frac{u'(a)}{1!}\,h + \frac{u''(a)}{2!}\,h^2 + \dots \tag{16.19}$$

Konvergenca vrste

To je *potenčni razvoj* funkcije (Taylor). Potenčna vrsta konvergira, če se njeni zaporedni členi dovolj hitro manjšajo. Kriterij za konvergenco (pri izbranem argumentu x) je, kot vemo, razmerje dveh zaporednih členov; limita tega razmerja mora biti absolutno manjša od 1 (15.6); Če vrsta konvergira za nek argument, konvergira tudi za vsak absolutno manjši argument. Za vsako funkcijo posebej moramo določiti, kakšen je največji argumant, za katerega njena vrsta še konvergira.

16.7 Razvoj osnovnih funkcij

Razvijmo v potenčne vrste nabor posebnih funkcij, ki jih že poznamo! To naredimo tako, da izračunamo zaporedne odvode teh funkcij in nato določimo, za kakšne vrednosti argumentov konvergirajo.

Eksponentna funkcija

Razvoj eksponentne funkcije že poznamo (15.7), saj smo jo pravzaprav definirali s potenčno vrsto. Vrsta konvergira za vsako vrednost argumenta. Za zabavo pa lahko postopek obrnemo: potenčno vrsto poustvarimo z zaporednim odvajanjem eksponentne funkcije.

Logaritemska funkcija

Prvi odvod logaritemske funkcije znaša $1/x$, kar je negativna naravna potenca, in vsi zaporedni odvodi te potence so spet potence. Razvijamo okrog točke $x = 1$, kjer ima logaritem vrednost nič, in dobimo:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \tag{16.20}$$

Vrsta konvergira za $|x| < 1$. Kako pa naj izračunamo logaritem za argument, ki je večji od 1? Poimenujmo ta argument y in ga zapišimo v obliki $y = (1+x)/(1-x)$. S tem je definiran $x = (y-1)/(y+1)$, ki je zmeraj manjši od 1. Zato lahko razvijemo $\ln(1+x)$ in $\ln(1-x)$ v dve vrsti, drugo odštejemo od prve in dobimo $\ln y$ kot

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots) \tag{16.21}$$

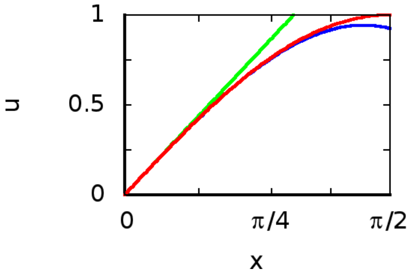
Na ta način zlahka izračunamo kakršenkoli logaritem in omilimo dosedanjo potrebo po logaritemskih tablicah.

Kotne funkcije

Zaporedni odvodi funkcij sinus in kosinus so, izmenično, spet funkcije sinus in kosinus. Razvijamo okrog točke nič, kjer ima sinus vrednost nič in kosinus vrednost ena, pa dobimo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad (16.22)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Vrsti sta konvergentni za poljubno velik argument. Z njima zlahka izračunamo kakršnokoli kotno funkcijo in tako omilimo dosedanjo potrebo po trigonometričnih tablicah.



Slika 16.3 Razvoj funkcije sinus v potenčno vrsto okrog izhodišča. Prikazani so grafi za prvi člen (zelen), za prvi in drugi člen (moder) in za vse člene (rdeč).

16.8 Maksimum in minimum

Odvod v ekstremu

V točki, kjer ima funkcija lokalni *maksimum* ali *minimum*, torej *ekstrem*, je tangenta vodoravna: odvod je enak nič. To nas navede na misel, kako za preiskovano funkcijo ugotoviti, ali in kje ima omenjene ekstreme. Funkcijo odvajamo, njen odvod izenačimo z nič in rešimo dobljeno enačbo. Najdeni koreni povedo, kje so lahko ekstremi.

Vrsta ekstrema

Ali je preučevani morebitni ekstrem v točki a maksimum ali minimum? Funkcijo razvijemo okrog te točke v vrsto do kvadratnega člena, pri čemer postavimo prvi odvod na nič. Dobimo izraz $u(a+h) = u(a) + 1/2 \cdot u(a)''h^2$. Faktor h^2 je vedno pozitiven. Če je torej drugi odvod $u''(a)$ pozitiven, se bo drugi člen vedno dodal k prvemu, zato imamo minimum. Če je drugi odvod negativen, imamo maksimum. Če pa je drugi odvod enak nič, imamo prevoj:

$$u = \max \Longleftrightarrow u' = 0 \text{ in } u'' < 0 \qquad (16.23)$$
$$u = \min \Longleftrightarrow u' = 0 \text{ in } u'' > 0\,.$$

Za parabolo $u = ax^2 + bx + c$, na primer, izračunamo $u' = 2ax + b = 0$, torej je ekstrem pri $x = -b/2a$, kakor smo svoj čas že ugotovili [14.6]. Drugi odvod $u'' = 2a$ je v ekstremalni točki pozitiven ali negativen, odvisno od tega, kakšen je koeficient a. □