9 Funkcije in grafi

Funkcije – Zapisi funkcij – Sorazmernost – Obratna sorazmernost – Potenčne funkcije – Polinomske funkcije – Druge funkcije – Prileganje podatkom

9.1 Funkcije

Spremenljivke

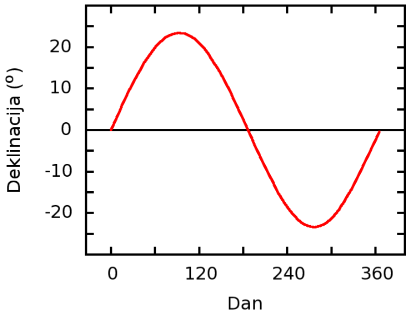
Dnevi se nizajo drug za drugim in štejejo čas, ki je potekel od izbranega dne v preteklosti. Rečemo, da je pretečeni čas t spremenljiva količina oziroma *spremenljivka*. Sonce vsak dan kulminira in njegova deklinacija (kotni odmik od nebesnega ekvatorja) je tudi spremenljivka: od dne do dne se spreminja. V svetu je očitno polno spremenljivk.

Odvisnost spremenljivk

Začenši z dnevom spomladanskega enakonočja lahko za vsak dan v letu izmerimo Sončevo deklinacijo in rezultate zapišemo v *tabelo*. Takšna tabela – ki jo že poznamo [6.3] – kaže, kako se deklinacija spreminja s časom. Deklinacija je odvisna od časa. Rečemo, da je čas *neodvisna spremenljivka* oziroma *argument* in deklinacija *odvisna spremenljivka* oziroma *funkcija*. Kakšna je njuna medsebojna odvisnost, pa kaže tabela.

Graf funkcije

Tabela, ki opisuje medsebojno povezavo dveh spremenljivk, ni posebno pregledna. Mnogo bolj nazorno jo prikažemo z *grafom*: vrednosti neodvisne spremenljivke predstavimo z razdaljami vzdolž vodoravne *abscisne osi*, vrednosti funkcije pa z odmiki vzdolž navpične *ordinatne osi*. Dolžinski enoti vzdolž obeh osi sta poljubni in ju priročno izberemo.



Slika 9.1 Graf deklinacije Sonca v odvisnosti od časa. Čas, merjen v dnevih od pomladnega enakonočja, je neodvisna spremenljivka ali argument. Deklinacija, merjena v stopinjah, pa je odvisna spremenljivka ali funkcija.

Enačba funkcije

Tudi razsežnosti teles so "spremenljive". Tako, na primer, si lahko predstavljamo kroge različnih polmerov. Polmer kroga je tedaj neodvisna spremenljivka. Vemo pa, da je z njegovo izbiro določen tudi obseg: $C = 2\pi r$. Obseg kroga je torej funkcija polmera. Funkcijska odvisnost pa ni podana niti s tabelo, niti z grafom, marveč na posebno odličen način, z *enačbo*. Ko v enačbo vstavimo vrednost za polmer, znamo iz nje izračunati, kakšen je pripadajoči obseg. Na ta način lahko zgradimo ustrezno tabelo in iz nje narišemo graf.

Kar velja za obseg kroga, velja tudi za njegovo ploščino – je funkcija polmera: $S = \pi r^2$. Funkcijska odvisnost pa je sedaj drugačna. In končno je tudi prostornina krogle funkcija polmera: $V = (4\pi/3)r^3$. Očitno obstaja med lastnostmi teles še mnogo funkcijskih povezav.

9.2 Zapisi funkcij

Oblike funkcij

Odmislimo tip spremenljivk (čas, kot, razdalja itd.) in označimo kakršnokoli neodvisno spremenljivko z x in odvisno spremenljivko z u. Kar preostane, so zgolj različne oblike funkcijskih odvisnosti; iz navedenih konkretnih primerov (za krog in kroglo) tako izluščimo naslednje oblike: $u = ax$, $u = ax^2$ in $u = ax^3$, pri čemer je a poljubno, a nespremenljivo število. Takšnemu številu rečemo konstanta ali parameter. Seveda si lahko zamislimo tudi neomejeno mnogo drugačnih oblik.

Eksplicitni in implicitni zapis

Enačba, ki opisuje funkcijsko odvisnost dveh količin, vsebuje dve spremenljivki. Kot že vemo, se enačba ne spremeni, če na levi in desni strani izvedemo isto operacijo. Zato lahko vsako – dovolj pohlevno – funkcijsko odvisnost zapišemo na različne, med seboj enakovredne načine, na primer: $u = ax^2$, $x = \sqrt{(u/a)}$ in $u - ax^2 = 0$. Prvi in drugi obliki rečemo *eksplicitna* in zadnji *implicitna*. Za obe eksplicitni obliki tudi rečemo, da sta druga drugi *obratni*. Splošno povezavo dveh skalarnih količin u in x pa zapišemo simbolično kot $u = f(x)$ ali $x = g(u)$ ali $F(x,u) = 0$.

Funkcije več spremenljivk

Nikjer ni zahtevano, da mora biti funkcija odvisna zgolj od ene neodvisne spremenljivke. Lahko je odvisna od več njih, kakor kaže zgled za prostornino valja: ta je odvisna od njegovega polmera in višine: $V = \pi r^2 h$. Na splošno bomo tako za dve neodvisni spremenljivki zapisali eksplicitno $u = f(x,y)$ (ali katero izmed obeh obratnih oblik) in implicitno $F(x,y,u) = 0$.

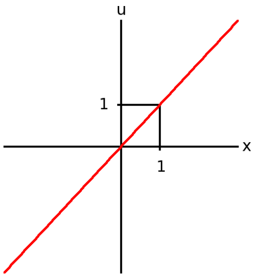
9.3 Sorazmernost

Kadar je kvocient dveh soodvisnih spremenljivk zmeraj enak, kakor na primer kvocient med obsegom poljubnega kroga in njegovim polmerom, imamo opravka s *sorazmernostjo*:

$$u = ax\,. \tag{9.1}$$

Premica

Graf te funkcije narišemo tako, da v primerno izbranih točkah abscise izračunamo ustrezne ordinate in dobljene točke med seboj povežemo. Nastane *premica*. Pravzaprav je dovolj, da določimo le dve točki: $u(0) = 0$ in $u(1) = a$, ter skoznju potegnemo premico. Tako vidimo, kakšen pomen ima koeficient a: označuje nagibni kot φ premice glede na abscisno os, $|a| = \tan\varphi$. Zato mu rečemo tudi smerni koeficient. Večji kot je, bolj strma je premica. Kadar je negativen, je premica padajoča.



Slika 9.2 Sorazmernost dveh količin $u = ax$. Graf je premica skozi izhodišče. Slika velja za koeficient $a = 1$. Večji kot je, bolj strma je premica. Če je koeficient negativen, je premica prezrcaljena preko abscisne osi, torej padajoča.

Obratna funkcija k sorazmernosti je tudi sorazmernost: $x = u/a$. Le smerni koeficient je zdaj drugačen, namreč $1/a$. Ni treba risati novega grafa, ampak že obstoječega pogledamo "od strani": ne torej vzdolž osi x, na katero so nataknjene ordinate, ampak vzdolž osi u, na katero so nataknjene abscise. Kogar to moti, lahko graf zavrti v nasprotni smeri urinega kazalca za 90°. Os x postane navpična in os u vodoravna. Da kaže v levo namesto v desno, pa je zanimiva poživitev.

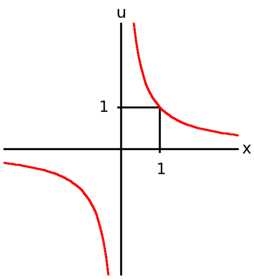
9.4 Obratna sorazmernost

Kadar je produkt dveh soodvisnih spremenljivk zmeraj enak, kakor na primer produkt med silo in potjo pri dvigu bremena po poljubnem klancu na dano višino, imamo opravka z *obratno sorazmernostjo*:

$$u = \frac{a}{x}\,. \tag{9.2}$$

Hiperbola

Izračunamo ordinate v primernih pozitivnih abscisnih točkah, na primer 0, 1/2, 1, 2 in ∞ (neskončno), ter jih povežemo. Enako storimo za ustrezne negativne točke. Nastane *hiperbola*. Definirana je v vsaki abscisni točki razen v izhodišču, kjer je neskončna. Rečemo, da ima tam *pol* oziroma da je ordinatna os *navpična asimptota* hiperbole. Daleč proč od izhodišča pa se čedalje tesneje približuje abscisni osi. Rečemo, da je ta *vodoravna asimptota*. Koeficient a določa, koliko je teme hiperbole oddaljeno od izhodišča.



Slika 9.3 Obratna sorazmernost dveh količin $u = a/x$. Graf poimenujemo hiperbola. Slika velja za koeficient $a = 1$. Večji koeficient pomeni večji odmik temena hiperbole od izhodišča. Če je koeficient negativen, je graf prezrcaljen preko abscisne osi.

Obratna funkcija k obratni sorazmernosti je tudi obratna sorazmernost: $x = a/u$. Še celo koeficient je isti. Funkcijo vidimo, ko obstoječi graf pogledamo "od strani".

9.5 Potenčne funkcije

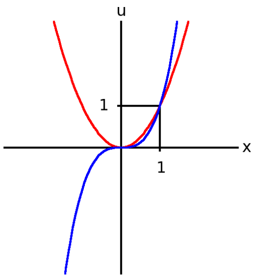
Naslednja vrsta funkcij, srečanih doslej, so naravne potence, na primer odvisnost med ploščino kroga in njegovim polmerom, ali med prostornino krogle in njenim polmerom:

$$u = ax^n\,. \tag{9.3}$$

Parabole

Graf kvadratne potence $u = ax^2$ poteka iz točke $u(0) = 0$ skozi $u(1) = a$ in naprej s čedalje večjo strmino. Graf je simetričen glede na ordinatno os: $u(-x) = u(x)$. Negativni koeficient a pomeni, da graf iz izhodišča pada, ne raste. Vse druge sode potence – njihovi eksponenti so mnogokratniki števila dve – imajo podobne grafe. Rečemo jim *sode parabole*.

Tudi graf kubne potence $u = ax^3$ poteka iz točke $u(0) = 0$ skozi $u(1) = a$ in naprej čedalje bolj strmo. Vendar je sedaj graf simetričen glede na izhodišče: $u(-x) = -u(x)$. Negativni koeficient a pomeni, da graf skozi izhodišče pada, ne raste. Vse druge lihe potence – tiste, ki niso sode – imajo podobne grafe. Rečemo jim *lihe parabole*.



Slika 9.4 Potenčna odvisnost količin $u = ax^2$ (rdeča) in $u = ax^3$ (modra). Grafa imenujemo paraboli, kvadratno in kubno. Slika velja za koeficienta $a = 1$. Večji koeficient pomeni bolj strmo naraščanje. Če je koeficient negativen, je graf prezrcaljen preko abscisne osi.

Obratne funkcije k potenčnim so korenske funkcije. Njihovi grafi so "od strani gledani" grafi potenčnih funkcij. Lihi koreni so definirani za vse vrednosti argumenta, sodi pa le za pozitivne. Grafi slednjih so tudi dvolični: eni vrednosti argumenta ustrezata kar dve vrednosti funkcije, namreč pozitivni in negativni koren.

9.6 Polinomske funkcije

Linearna funkcija

V dosedanjih funkcijah so nastopali le produkti in kvocienti spremenljivk in parametrov (naravne potence so pravzaprav tudi le produkti). Vpeljimo še vsote in razlike! Najpreprostejša tovrstna funkcija je

$$u = ax + b\,. \tag{9.4}$$

Rečemo ji *linearna funkcija*. Od sorazmernosti se razlikuje po dodatnem členu b. Zato je njen graf že poznana premica, vendar premaknjena iz izhodišča paralelno vzdolž ordinatne osi za b; navzgor, če je pozitiven, in navzdol, če je negativen.

Kje premica seka ordinatno os, izračunamo tako, da v enačbo vstavimo $x = 0$ in izračunamo u. Seveda dobimo $u = b$. Presečišče premice z abscisno osjo pa dobimo tako, da v enačbo vstavimo

$u = 0$, s tem pridelamo *linearno enačbo* $ax + b = 0$ in iz nje izračunamo $x = -b/a$.

Kvadratna funkcija

Naslednja po vrsti je *kvadratna funkcija*:

$$u = ax^2 + bx + c\,. \tag{9.5}$$

Kakšen je njen graf? Če $b = 0$, je očitno že znana parabola, premaknjena vzdolž ordinatne osi za c gor ali dol. Linearni člen bx pa vse skupaj zaplete. Bi se ga morda lahko znebili? Da, s pretvorbo funkcije v "temensko" obliko $u = a(x + b/2a)^2 - (b^2/4a) + c$, torej v kvadratno funkcijo $u = aX^2 + D$ z novo neodvisno spremenljivko $X = x + b/2a$ in z novim konstantnim členom $D = c - b^2/4a$. To pa že znamo narisati: teme ima pri $X = 0$, to je pri $x = -b/2a$, in premaknjeno je po navpičnici za D.

Presečišče parabole z ordinatno osjo določimo tako, da izračunamo vrednost kvadratne funkcije za $x = 0$. Dobimo $u = c$. Določitev presečišč z abscisno osjo pa vodi do *kvadratne enačbe* v temenski obliki; po ločitvi členov in korenjenju dobimo dve formalni rešitvi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}\,. \tag{9.6}$$

Dve dejanski rešitvi – skalarja – dobimo le tedaj, ko je podkorenski izraz pozitiven.

Višji polinomi

Z dodajanjem čedalje višjih potenc lahko nadaljujemo v nedogled. Tako dobimo *polinomske funkcije* višjih stopenj. Linearna funkcija je polinom prve stopnje in kvadratna funkcija je polinom druge stopnje. V polinomu stopnje n, daleč proč od izhodišča, prevladuje člen ax^n: po absolutni vrednosti je večji od vseh ostalih. Tako se graf tudi vede: daleč proč od izhodišča je podoben ustrezni potenčni funkciji. Blizu izhodišča pa seveda vijuga po svoje. Ker ima linearna funkcija največ eno ničlo, kvadratna pa dve, predvidevamo, da ima tak polinom največ n ničel.

9.7 Druge funkcije

Gradnja funkcij

Polinome lahko med seboj seštevamo, odštevamo, množimo in delimo. V prvih treh primerih spet dobimo polinom. V zadnjem primeru pa dobimo *racionalne* funkcije in njim ustrezajoče grafe ter enačbe. Posebno preprost primer je že poznana obratna sorazmernost. Če jih še korenimo, pa dobimo prav hude *iracionalne* funkcije. Vse skupaj – polinome, racionalne in iracionalne funkcije – poimenujemo algebrajske funkcije. S tem pravzaprav izrazimo pričakovanje, da morda obstajajo še druge, recimo jim *transcendentne* funkcije. Če bomo katero kdaj srečali in bo pomembna, se ji bomo posvetili tedaj.

Preoblikovanje grafov

Risanje grafov za linearno in kvadratno funkcijo nam kaže, kako lahko dani graf $u = f(x)$ preoblikujemo in dodelujemo. — Premaknemo ga vzdolž abscisne osi: $x \to x - a$ in vzdolž ordinatne osi: $u \to u - a$. Če je a pozitiven, je premik usmerjen v desno (naprej), sicer v levo (nazaj). — Raztegnemo ga vzdolž abscisne osi: $x \to x/a$ in vzdolž ordinatne osi: $u \to u/a$. Če je a večji od ena, se graf raztegne, sicer skrči. — Prezrcalimo ga preko abscisne osi: $x \to -x$ ali preko ordinatne osi: $u \to -u$. Funkcije, za katere velja $f(-x) = f(x)$, so torej simetrične glede na ordinatno os; po zgledu sodih potenc jih poimenujemo *sode funkcije*. Funkcije $f(-x) = -f(x)$ so simetrične glede na izhodišče in jim iz podobnega razloga rečemo *lihe funkcije*.

Reševanje enačb

Reševanje linearne in kvadratne enačbe nam ponuja tudi zgled, kako reševati poljubno enačbo $F(x,a) = 0$, pri čemer smo z a označili enega ali več njenih parametrov. Cilj nam je, da enačbo preoblikujemo v obliko $x = f(a)$, pri čemer je $f(a)$ izračunljiv številski izraz. Enačba se pri tem ne spremeni, če nad levo in desno stranjo uporabimo enako operacijo: kaj prištejemo ali odštejemo; s čim pomnožimo ali delimo; potenciramo; korenimo; in podobno. Seveda pa ni nobenega zagotovila, da bo vsaka enačba, ki jo bomo kdaj srečali, tudi rešljiva.

9.8 Prileganje podatkom

Interpolacija

Funkcija, ki je opisana s tabelo, je poznana zgolj v posameznih točkah. Kakšne pa so vrednosti med dvema točkama $u_1 = u(x_1)$ in $u_2 = u(x_2)$? Najlažje je, če tam aproksimiramo funkcijo s premico. V vmesni točki x ima funkcija potem vrednost $u = u_1 + (x - x_1)(u_2 - u_1)/(x_2 - x_1)$. To je *linearna interpolacija*. Ne da bi kaj dosti premišljevali, smo jo doslej že večkrat uporabili: pri tabelah sončnih deklinacij [6.3] in anomalij [6.6] ter pri tabelah kotnih razmerij [7.5] in logaritmov [8.6]. Zdaj, ko smo spoznali linearno funkcijo, smo interpolacijski obrazec tudi zapisali.

Enačba grafa

Če je funkcija podana z enačbo, izračunamo in narišemo njen graf bolj ali manj zlahka. Obratna pot je mnogo težja: če poznamo kakšen graf, s katero enačbo bi ga opisali? Ne gre drugače, kot da ga primerjamo z grafi že poznanih funkcij, ugotovimo, kateremu je najbolj podoben in nastavimo funkcijske parametre tako, da je ujemanje najboljše.

Poglejmo najpreprostejši primer, ko nas izmerjene točke (x,u) vabijo, da skoznje potegnemo premico. To storimo tako, da se odmiki merskih točk od nje navzgor in navzdol "izravnajo". Izravnavanje ocenimo kar na oko, vendar upamo, da bomo kdaj v prihodnje našli bolj "objektiven" način. S tem smo merske podatke aproksimirali z grafom linearne funkcije $u = ax + b$. Vrednost parametra a določimo iz strmine narisane premice:

$a = \Delta u/\Delta x$. Parameter b pa je podan s presečiščem premice in ordinatne osi.

Kaj pa, če je funkcija videti kot potenčna funkcija $u = ax^n$? Tedaj enačbo logaritmiramo in dobimo $\lg u = n \lg x + \lg a$, kar je linearna funkcija $U = nX + A$ z novima spremenljivkama in z novim parametrom. Narišemo merske točke (X, U) in – če res tvorijo premico – po že znani metodi določimo vse parametre. Seveda velja postopek le, kadar so vrednosti logaritmiranih količin pozitivne. Eksponent pa je lahko pozitiven ali negativen. □