8 Relativna števila

Relativna števila – Računanje s skalarji – Skalarna potenca – Logaritem – Desetiški logaritem – Logaritemska tabela – Drsno računalo

8.1 Relativna števila

Predznačeni premik

Prebivalcem na morski obali je dobro znano, da gladina morja ni zmeraj enako visoka: včasih je višja in včasih nižja. To se lepo vidi na lesenem pomolskem kolu, ki je zabit v morsko dno. Če v les naredimo vodoravno zarezo na primernem mestu, lahko višino gladine podamo z njeno razdaljo od te zareze – navzgor ali navzdol. Razdaljo na primer 0,5 metra navzgor zapišemo kot $+0{,}5\,\mathrm{m}$ in navzdol kot $-0{,}5\,\mathrm{m}$. Vpeljana predznaka "+" in "−" povesta, ali je gladina povišana (povečana) ali znižana (zmanjšana) glede na izhodiščno zarezo.

Pozitivne in negativne vrednosti količin

Podobno kot označujemo višinski odmik (v metrih) morske gladine, lahko opisujemo še marsikaj drugega: časovni odmik (v letih) kakega dogodka od izbranega izhodiščnega dogodka, recimo rojstva preroka Ješue; kotni odmik opoldanskega Sonca (v stopinjah) nad ali pod nebesnim ekvatorjem; in, seveda, prihodek-odhodek denarja ter stanje trgovske blagajne. Tako pravimo: znamenita bitka pri Termopilah se je zgodila leta −480; deklinacija Sonca ob zimskem obratu znaša −23,5°; in stanje v blagajni je padlo, žal, na −300 denarjev. Rekli bomo, da so vse to – čas, kot, blagajniško stanje in drugo – relativne količine, ki imajo *pozitivno* ali *negativno* vrednost (BRAHMAGUPTA).

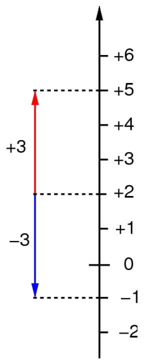
Relativna števila oziroma skalarji

Odmislimo za trenutek merske enote količin in se zanimajmo le za njihove številske vrednosti. Simbolično jih označimo s $+p$ ali z $-p$, pri čemer je p poljubno decimalno število. S tem vpeljemo *relativna števila* oziroma *skalarje* kot "predznačena" decimalna števila. Skalarji so torej razširitev decimalnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer v obliki pozitivnih skalarjev. Kadar nas ne zanima predznak skalarja, ampak le njegova velikost, definiramo še *absolutno vrednost* kot $|\pm p| = p$.

8.2 Računanje s skalarji

Seštevanje

Gladina morja naj ima neko višino, pozitivno ali negativno, $\pm p$. Glede na to višino lahko morje potem naraste ali upade. Porast višine označimo kot $+q$ in upad gladine kot $-q$. Porast in upad sta pravzaprav dve strani istega kovanca in ju zato združimo v skupen pojem, *spremembo*: porast je pozitivna sprememba in upad je negativna sprememba. Nato rečemo, da se je ta sprememba dodala oziroma prištela k obstoječemu stanju. S tem je postavljen model za seštevanje relativnih števil.



Slika 8.1 Seštevanje skalarjev. Vsoto določimo tako, da prvemu sumandu dodamo ali odvzamemo absolutno vrednost drugega sumanda: $(+2)+(+3)=(+5)$ in $(+2)+(-3)=(-1)$. Oklepaje in pozitivne predznake ponavadi kar izpuščamo: $2+3=5$ in $2+(-3)=-1$. Na sliki je prvi sumand pozitiven. Če je prvi sumand negativen, je postopek enak.

Relativna števila torej seštevamo tako, da k prvemu sumandu dodamo ali od njega odvzamemo absolutno vrednost drugega sumanda – dodamo tedaj, če je slednji pozitiven, in odvzamemo, če je negativen:

$$\begin{aligned}(\pm p)+(+q)&=(\pm p)+q \\ (\pm p)+(-q)&=(\pm p)-q\,.\end{aligned} \tag{8.1}$$

Odštevanje

Naj ima morje spet višino $\pm p$, pred tem pa je doživelo spremembo $+q$ (je naraslo) ali $-q$ (je upadlo). Kakšno je bilo morje pred to spremembo? Takšno, kot je obstoječe stanje z odvzeto/odšteto spremembo. S tem je postavljen model za odštevanje relativnih števil:

$$\begin{aligned}(\pm p)-(+q)&=(\pm p)-q \\ (\pm p)-(-q)&=(\pm p)+q\,.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Relativna števila torej odštevamo tako, da od prvega člena odvzamemo ali mu dodamo absolutno vrednost drugege člena – odvzamemo tedaj, če je slednji pozitiven, in dodamo, če je negativen.

Pri seštevanju in odštavanju lahko od pozitivnega skalarja odštejemo več, kot je sam velik, in dobimo negativni skalar. K negativnemu skalarju pa tudi lahko prištejemo več, kot je sam velik, in dobimo pozitiven skalar. V množici skalarjev postane odštevanje vedno mogoče.

Množenje

Višina morja se lahko spremeni n-krat za enako spremembo. S tem je definirano množenje skalarja z naravnim številom: $n\cdot(\pm q)=\pm nq$. To nas nujno sili na naslednje definicije za množenje dveh skalarjev:

$$\begin{aligned}(+p)(+q)&=+pq \\ (+p)(-q)&=-pq \\ (-p)(-q)&=+pq\,.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Prvi dve definiciji sta samoumevni, saj pozitivni skalar $+p$ upošteva, kot posebne primere, naravna števila n. Tretji produkt pa mora po velikosti tudi znašati pq, le za njegov predznak se moramo odločiti. Ker $-p$ in $-q$ ne moreta tvoriti enako predznačenega produkta kot $+p$ in $-q$, marveč morata tvoriti nasprotno predznačenega, je odločitev na dlani.

Deljenje

Deljenje je obratna operacija od množenja in to sorodnost hočemo ohraniti. Zato so z definicijami za množenje hkrati postavljene tudi definicije za deljenje: kvocient je pozitiven, če imata deljenec in delitelj oba enaka predznaka, sicer pa je negativen.

$$\begin{aligned}(+p)/(+q) &= +p/q \\ (+p)/(-q) &= -p/q \\ (-p)/(-q) &= +p/q\,.\end{aligned} \tag{8.4}$$

S tem so definirane štiri osnovne računske operacije nad skalarji. Definicije zagotavljajo, da še naprej veljajo vsi računski zakoni (2.1), prav kakor so doslej veljali za naravna in za decimalna števila. Skalarje bomo odslej, kadar bo potrebno, označevali z oznakami a, b in c. V takšni oznaki sta torej skrita decimalno število in njegov predznak.

8.3 Skalarna potenca

Negativna potenca

Zaporedje potenc $p, p^2, p^3, p^4 \ldots$ kaže, da je vsaka potenca dobljena z množenjem predhodne s p, in da je vsak eksponent dobljen z povečanjem predhodnega za 1. Seveda velja tudi obratno: vsaka predhodna potenca je dobljena z deljenjem s p in vsak predhodni eksponent je zmanjšan za 1. To nas kar sili, da zapisano vrsto raztegnemo v levo: $\ldots p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2 \ldots$ in na ta način vpeljemo potence z *negativnim eksponentom*

$$p^{-n} = \frac{1}{p^n}\,. \tag{8.5}$$

Z uvedbo negativnih naravnih eksponentov je odpravljena omejenost pravila za deljenje potenc z isto osnovo preko odštevanja njihovih eksponentov: to odštevanje je sedaj vedno izvršljivo. Prav tako lahko majhna števila zapišemo v eksponentni obliki na lepši način, na primer $6{,}4/10^3 = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Ulomna potenca

Drugi koren od p^2 je p; od p^4 je p^2; od p^6 je p^3; nasploh se pri korenjenju sodi eksponenti zmanjšajo na polovico. Prisiljeni smo torej posplošiti, da to velja tudi za preostale, lihe eksponente: koren od p^3 je $p^{3/2}$, od p^5 je $p^{5/2}$ in tako dalje. Podoben razmislek velja za tretji koren in za vse višje korene, ter nas vodi do naslednje definicije potence z *ulomnim eksponentom*:

$$p^{m/n} = {}^n\!\sqrt{p^m}\,. \tag{8.6}$$

Skalarna potenca

Definiciji za negativno potenco in za ulomno potenco zajamemo v razširjeni definiciji za negativno ulomno potenco:

$$p^{-m/n} = \frac{1}{p^{m/n}}\,. \tag{8.7}$$

S tem je definirana *skalarna potenca*: njena baza je (pozitivno) decimalno število in njen eksponent je poljuben skalar. Za takšno potenco ostajajo v veljavi vsa računska pravila kot za "navadno" potenco z naravnim eksponentom (5.2). Prav tako nam ponuja mamljivo možnost, da pozabimo na dosedanje korenske oznake in na pravila za računanje s koreni (5.4), ter namesto obojega uporabljamo kar ulomne eksponente.

8.4 Logaritem

Obrat potence

Vrednost potence $b^L = N$ je odvisna od njene osnove b in eksponenta L. Naj bo osnova znana, recimo 2 ali 10. Potem k vsakemu L pripada nek N, ki ga znamo izračunati. Vendar tudi k vsakemu N pripada ustrezajoč L. Poimenujmo ga *logaritem* baze b "za tvorbo" N in označimo kot $\log_b N$. Velja torej:

$$b^L = N \Longleftrightarrow L = \log_b N\,. \tag{8.8}$$

Pravila logaritmiranja

Pri iskanju logaritma za dano število smo zaenkrat omejeni zgolj na posebne primere. Tako vemo, na primer, da $2^{1/2} = 1{,}41$, zato $\log_2 1{,}41 = 1/2 = 0{,}5$. Takih primerov nam hitro zmanjka. Na srečo se lahko opremo na naslednja pravila, ki vsa sledijo iz pravil za računanje s potencami:

$$\begin{aligned} \log pq &= \log p + \log q \qquad (8.9)\\ \log \frac{p}{q} &= \log p - \log q \\ \log p^a &= a \log p\,. \end{aligned}$$

Oznako za bazo smo kar izpustili. Če torej poznamo logaritme za posamezna števila, poznamo tudi logaritme za njihove produkte, kvociente in potence. S tem precej razširimo nabor števil, katerim znamo izračunati logaritme.

8.5 Desetiški logaritem

Zaradi desetiškega zapisa števil so posebej odlikovane potence z osnovo 10. Tako zapis $10^L = N$ enolično določa eksponent L, ki "pripada" številu N. Rečemo, da je L *desetiški logaritem* števila N in zapišemo $\log_{10} N = L$. Namesto oznake $\log_{10}$ bomo raje pisali na kratko:

$$\lg p = \log_{10} p\,. \tag{8.10}$$

Kjer ne bo škode, bomo pridevnik "desetiški" kar izpuščali.

Celi in polceli logaritmi

Ker $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ in $10^3 = 1000$, že poznamo logaritme števil 1, 10, 100, 1000; to so: 0, 1, 2, 3. Podobno velja za vse predznačene naravne potence. Kakšni pa so logaritmi drugih števil? Ali poznamo morda kakšen L, da znamo izračunati 10^L? Da, 1/2. Z zaporednim korenjenjem izračunamo:

Tabela 8.1 Zaporedni koreni števila 10.

	10^L	N
$10^{1/2}$ =	$10^{0,500}$ =	3,162
$10^{1/4}$ =	$10^{0,250}$ =	1,778
$10^{1/8}$ =	$10^{0,125}$ =	1,334
	$10^{0,063}$ =	1,155
	$10^{0,031}$ =	1,075
	$10^{0,016}$ =	1,037
	$10^{0,008}$ =	1,018
	$10^{0,004}$ =	1,009
	$10^{0,002}$ =	1,005
$10^{1/1024}$ =	$10^{0,001}$ =	1,002

Tako smo ugotovili logaritme števil 3,162, 1,778 itd; to so 0,500, 0,250 itd. Pa ne samo teh! Če namreč poznamo logaritma L_1 in L_2 od dveh števil N_1 in N_2, poznamo tudi logaritem od števila $N_1 \cdot N_2$; to je $L_1 + L_2$. Tako je na primer logaritem števila $3{,}162 \cdot 1{,}778 = 5{,}622$ enak $0{,}500 + 0{,}250 = 0{,}750$.

S tem se pokaže pot, kako izračunati logaritem poljubnega števila N. Število N zapišemo kot produkt $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \ldots$ tistih števil, katerih logaritme že poznamo, nakar te logaritme seštejemo.

8.6 Logaritemska tabela

Izdelava tabele

Izračunajmo logaritme naravnih števil med 1 in 10! Logaritem ena je nič. Kakšen je logaritem števila dve? Število razcepimo na faktorje iz zgornje tabele. Prvi faktor mora biti manjši in čim bliže 2; to je 1,778. Drugi faktor bi moral biti $2/1{,}778 = 1{,}125$. Takega faktorja v tabeli ni. Prvi od njega nižji je 1,075. To je torej drugi faktor. Tretji faktor bi moral biti 1,125/1,075 in tako naprej. Dobimo: $2 = 1{,}778 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}009$. Ustrezni logaritem je: $0{,}250 + 0{,}031 + 0{,}016 + 0{,}004 = 0{,}301$. S tem določimo logaritem 2, pa tudi logaritme $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2$, $16 = 8 \cdot 2$, $1{,}6 = 16/10$ itd. Podobno izračunamo še logaritme 3, 5 in 7. Vse preostale logaritme določimo iz že izračunanih. Končna tabela, zaokrožena na dve decimalki, je naslednja:

Tabela 8.2 Osnovni desetiški logaritmi.

N	lg N
1	0,00
2	0,30
3	0,48
4	0,60
5	0,70
6	0,78
7	0,84
8	0,90
9	0,95
10	1,00

To je tabela desetiških logaritmov med 1 in 10 s korakom po 1. Omogoča nam poiskati približni logaritem kateregakoli števila, na primer $\lg 35 = \lg 3{,}5 + \lg 10 = 1{,}54$. Pri iskanju logaritma števila 3,5, ki ga ni v tabeli, smo si pomagali z interpolacijo [6.3] med 3 in 4. Z računanjem večjega števila zaporednih korenov in na več decimalk lahko logaritemsko tabelo še mnogo bolj zgostimo, recimo na korak $1 \cdot 10^{-3}$ ali celo na $1 \cdot 10^{-6}$.

Uporaba tabel

Zakaj je dobro imeti podrobno tabelo logaritmov? Zato, ker z njimi lažje izračunamo produkte, kvociente in ulomne potence (torej tudi korene) dolgih števil. Produkt dveh števil izračunamo tako, da poiščemo njuna logaritma, ju seštejemo in nato poiščemo dobljenemu logaritmu ustrezajoče število. Delimo tako, da logaritma odštevamo. Potenciramo pa tako, da logaritem množimo z ulomnim eksponentom. Uporaba logaritmov torej prevede množenje na seštevanje, deljenje na odštevanje in potenciranje na množenje oziroma deljenje. Zakaj si ne bi olajšali življenja, če si ga lahko?

8.7 Drsno računalo

Logaritemske tabele so neudobne za prenašanje. Zato iščemo, kako bi logaritme na kakšen drug način izkoristili za udobno množenje in deljenje. Domnevamo, da bo pri tem osrednjo vlogo igralo pravilo, da je logaritem produkta/kvocienta dveh števil enak vsoti/razliki logaritmov teh dveh števil (8.9). To nam da misliti.

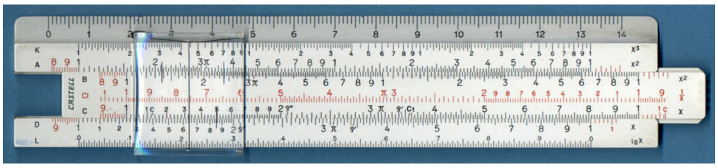
Logaritemske palice

Kaj ko bi imeli deset palic, označenih s številkami od 1 do 10, in z dolžinami $\lg 1$, $\lg 2$ … $\lg 10$ metra? Ko bi staknili palico 2 (z dolžino $\lg 2$) in palico 3 (z dolžino $\lg 3$), bi dobili sestavljeno palico, ki bi bila dolga $\lg 2 + \lg 3$. Ker vemo, da je to enako $\lg(2 \cdot 3) = \lg 6$, bi morala biti sestavljena palica enako dolga kot palica številka 6. Množenje $2 \cdot 3$ bi torej lahko izvedli z "logaritemskimi" palicami takole: na konec palice 2 bi nataknili začetek palice 3 ter pogledali, s katero palico se sestavek ujema. Oznaka te palice bi bila iskani produkt.

Podobno bi izvedli deljenje $6:3$. Od konca palice 6 bi položili palico 3 nazaj in pogledali, s katero palico se ujema nepokriti preostanek. Oznaka te palice, to bi bil iskani kvocient.

Logaritemska skala

Seveda ni treba, da snop palic zares izdelamo, ampak jih raje narišemo, kot zareze, na eno samo ploščato palico, "logaritemsko skalo". Na skalo spravimo mnogo več zarez kot deset in jih na primeren način označimo. Tudi ni treba, da je skala dolga en meter, ampak je lahko krajša. Za računanje potem potrebujemo dve taki skali, ki ju premikamo drugo ob drugi. Tako smo izumili *drsno računalo*.



Slika 8.2 Drsno računalo. Osnovni skali sta D in drseči C. Računalo kaže produkt $1{,}24 \cdot 1{,}32 = 1{,}64$. Hkrati kaže kvocient $1{,}64/1{,}32 = 1{,}24$. Skala A je kvadrat skale D in kaže $1{,}64^2 = 2{,}7$ oziroma $\sqrt{2{,}7} = 1{,}64$. Podobno velja za skalo K, ki je kub skale D. Skala L pa je logaritem skale D in kaže $\lg 1{,}64 = 0{,}215$. (Anon)

Z drsnim računalom udobno množimo in delimo, le za lego decimalne vejice v rezultatu moramo poskrbeti sami. Natančnost računanja je tem večja, čim daljši sta obe skali. Pri dolžini 25 cm je dosežena natančnost na 2–3 značilna mesta, kar je mnogokrat povsem dovolj. Uporabnost računala še povečamo, če nanj narišemo druge skale, ki služijo za izračunavanje kvadratov (in korenov), kubov (in kubičnih korenov), logaritmov, kotnih razmerij (sinusov, kosinusov, tangensov) in še marsičesa. □