5 Potence in koreni

Desetiške potence – Nenatančna števila – Potence – Koreni – Obrestni račun – Obrestno obrestni račun

5.1 Desetiške potence

Desetiške potence

Ko države rastejo, imajo njihovi uradniki opravka s čedalje večjimi števili. Pri tem se pojavi naslednja težava. Desetiške enote 10, 100, 1000 in naprej je čedalje težje pisati in brati, čim več ničel vsebujejo. Zato jih, kot domiselni uradniki, zapišemo na kratko v obliki 10, 10^2, 10^3 in tako dalje. Izraz 10^n pove, da je to desetiška enota, ki vsebuje n ničel. Hkrati je tudi okrajšava za produkt n enakih faktorjev 10. Število 10^n poimenujemo *desetiško potenco* in število n njen *eksponent*. Kot posebna primera zapišemo še $10^1 = 10$ in $10^0 = 1$.

Eksponentni zapis števil

Z desetiškimi potencami lahko na kratko in bolj pregledno zapišemo tudi druga velika števila. Tako, na primer, zapišemo število 1 600 000 kot $1{,}6 \cdot 10^6$. Podobno velja za majhna števila, recimo $0{,}0016 = 1{,}6/10^3$. Obakrat smo število zapisali kot produkt ali kvocient decimalnega števila in ustrezno velike desetiške potence. Rekli bomo, da je to *eksponentni zapis* števila. Najbolj pregledno je izbrati tak zapis, da znaša prvi faktor med ena in deset, eksponent pa je temu prilagojen. Dobro je tudi tako, da je eksponent omejen na mnogokratnik števila 3 ter prvi faktor ustrezno prilagojen.

Eksponentni zapis števil precej olajša računanje z njimi. Seštevamo tako, da vsa števila zapišemo z istimi desetiškimi potencami, nakar to potenco izpostavimo in seštejemo preostanek. Podobno ravnamo pri odštevanju. Pri množenju pa preprosto seštejemo eksponente in pri deljenju jih odštejemo oziroma okrajšamo: $10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$ in $10^3/10^2 = 10^{3-2} = 10$.

5.2 Nenatančna števila

Napake pri štetju

Število ljudi v veliki državi gre v milijone. Kot državni pisarji jih moramo občasno prešteti. Pri tem ne gre brez napak: ene ljudi spregledamo, drugi se poskrijejo, tretji spet vmes umrejo, se rodijo, priselijo ali odselijo, delne vsote iz posamičnih pokrajin se narobe seštejejo in še marsikaj drugega se lahko zgodi. Število, do katerega po mukotrpnem delu pridemo, torej nikakor ni natančno. Pri štetju več milijonov ljudi so dobljene enice, desetice, stotice in verjetno celo tisočice nezanesljive. Kar je višjih enot, pa pričakujemo, da so zanesljive.

Značilne številke

Postavimo si odlično pravilo, da bomo pri rezultatu štetja ljudi (ali česarkoli drugega) zapisali le *zanesljiva mesta*. Tako zapišemo, na primer, 3 602 ooo: na nezanesljiva mesta smo postavili majhne ničle. Še boljši je eksponentni zapis: $3{,}602 \cdot 10^6$. Prvi faktor vsebuje zgolj zanesljiva mesta; ta so štiri. Več ko je zanesljivih mest, bolj natančno je število poznano.

Pri določanju, koliko zanesljivih mest vsebuje zapisano število, se ravnamo po naslednjih pravilih. — Vse neničelne številke so značilne. — Ničle med dvema neničelnima številkama so značilne. — Vodeče ničle niso značilne. — Repne ničle v naravnem številu so značilne, če so pisane z veliko ničlo, in neznačilne, če so pisane z majhno ničlo. — Repne ničle v decimalnem številu so značilne: 3,1 ni isto kot 3,10; prvo število je natančno zgolj na desetine, drugo pa na stotine. — Naravno število s samimi značilnimi številkami ustreza decimalnemu številu z neskončnim repom decimalnih ničel: 12 je isto kot 12,0…

Zaokroževanje števil

Kadar pri zelo natančnem številu – takšnem, ki ima veliko značilnih mest – dvomimo o zanesljivosti repnih številk, ali kadar nas ne zanimajo, jih preprosto odrežemo. Če je prva odrezana številka manjša od pet, pustimo zadnjo neodrezano številko nespremenjeno, sicer pa jo povečamo za ena. Rečemo, da smo število *zaokrožili*. Na ta način pri rezanju repa pridelamo najmanjšo napako.

Okrajšano računanje

Pri računanju z nenatančnimi števili v eksponentnem zapisu moramo paziti, da v rezultatu ne pridelamo večje natančnosti, kot jo dovoljujejo izvorna števila. Tako ima vsota le toliko značilnih decimalk, kot jih ima sumand z najmanjšim številom decimalk. Vsoto moramo zato primerno okrajšati. Še bolje pa je, da že pred začetkom seštevanja zaokrožimo ustrezni sumand. Za razliko velja isto. Produkt ima toliko značilnih mest, kolikor jih ima faktor z najmanjšim številom značilnih mest. Tudi v tem primeru moramo produkt ustrezno okrajšati ali pa že pred množenjem ustrezno okrajšamo preveč natančni faktor. Za kvocient velja isto. Pri vseh krajšanjih pred dejanskim računanjem je najbolje, da krajšamo na eno mesto manj, kot je potrebno, in šele rezultat dokončno in pravilno zaokrožimo.

5.3 Potence

Naravna potenca

Kar velja za potence števila 10, posplošimo za poljubno število p: produkt n enakih števil p na kratko zapišemo kot

$$pp \dots p = p^n \tag{5.1}$$

in poimenujemo n-ta *potenca* števila p. S tem je definirano potenciranje števila. Rečemo, da je p *osnova (koren)* potence, n pa njen *eksponent (logaritem)*. Dober zgled je rezanje hlebca: koliko kosov nastane, ko ga prerežemo na pol, nato polovici spet na pol in tako dalje, skupaj štirikrat? Toliko: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Računska pravila

Iz definicije potence takoj sledijo naslednji izreki za računanje z njimi:

$$p^m p^n = p^{m+n} \tag{5.2}$$
$$\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n}$$
$$(pq)^n = p^n q^n$$
$$(\frac{p}{q})^n = \frac{p^n}{q^n}$$
$$(p^m)^n = p^{mn}\,.$$

Seveda veljata še posebna primera $p^1 = p$ in $p^0 = 1$. Odštevanje eksponentov je smiselno le, če je števec večji od imenovalca.

5.4 Koreni

Obrat potence

Potenciranje števila R na eksponent n je računska operacija, ki iz števila R naredi novo število, namreč $R^n = N$. Rečemo, da številu R "pripada" število N, ali da se R "preslika" v N: $R \rightarrow N$. Z enako pravico lahko tudi rečemo, da številu N pripada R, oziroma da se N preslika v R: $R \leftarrow N$. Vendar obstaja pomembna razlika med obema preslikavama. Če poznamo R, lahko N takoj izračunamo – tako, da ga pač n-krat množimo samega s sabo. Če poznamo N, pa pripadajočega R ne znamo neposredno izračunati. Lahko pa ga seveda poimenujemo: rekli mu bomo *koren* in zapisali ${}^n\sqrt{N} = R$. Velja torej:

$$R^n = N \Longleftrightarrow R = {}^n\sqrt{N}\,. \tag{5.3}$$

Zapis ${}^n\sqrt{N}$ je hkrati oznaka števila, ki potencirano da N: $({}^n\sqrt{N})^n = N$, je pa tudi oznaka posebne "operacije" – *korenjenja* – nad številom N.

Izračun korena

Poimenovanje korena kot ${}^n\sqrt{N}$ seveda še ni noben dokaz, da takšno število tudi obstaja, in še manj navodilo, kako ga najdemo. Vemo pa tole: čim večje je število, tem večja je njegova potenca, zato velja tudi: čim večje je število, tem večji je njegov koren. To izkoristimo za organizirano *ugibanje* iskanega korena. Izberemo primeren *približek* in ga potenciramo. Če dobimo preveč, izberemo ustrezno manjši približek, sicer večjega. Tako nadaljujemo, dokler ne pridelamo zadovoljive rešitve. Na ta način izračunamo, na primer, ${}^2\sqrt{2} = 1{,}41$ in ${}^2\sqrt{3} = 1{,}73$. Namesto znaka ${}^2\sqrt{}$ bomo odslej pisali kar $\sqrt{}$.

Za drugi koren iz N iznajdemo tudi naslednje dobro organizirano ugibanje. Izberemo začetni približek R_0 tako, da je ${R_0}^2$ blizu N. Naslednji boljši približek je $R_1 = (R_0 + N/R_0)/2$. Postopek ponavljamo in se hitro bližamo pravemu R.

Računska pravila

Koreni so v tesni zvezi s potencami. Pravzaprav je korenjenje obratna operacija k potenciranju. Od tod izvlečemo več pravil za računanje:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt[n]{p})^n &= \sqrt[n]{(p^n)} = p \\
\sqrt[n]{p^m} &= \sqrt[kn]{p^{km}} \\
\sqrt[n]{(pq)} &= \sqrt[n]{p}\,\sqrt[n]{q} \\
\sqrt[n]{\frac{p}{q}} &= \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}} \\
\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} &= \sqrt[nm]{p}\,.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Z uporabo teh pravil si dostikrat olajšamo računanje. Podkorensko število, na primer, zapišemo kot produkt faktorjev in korenimo vsakega posebej: $\sqrt{6} = \sqrt{(2 \cdot 3)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

5.5 Obrestni račun

Obrestna enačba

Razmah trgovine vodi do kovanega denarja in nekateri trgovci močno obogatijo. Drugi, ki nimajo denarja, a ga potrebujejo, si ga izposodijo pri bogataših. Pri tem obljubijo, da bodo izposojeni denar – *glavnico* G – čez nekaj časa vrnili, hkrati pa dodali še nekaj dodatnega denarja – *obresti* R – kot plačilo za uslugo. Ponavadi znašajo obresti določen delež glavnice: $R = npG$, pri čemer je n število let od posojila do vrnitve in p letna *obrestna mera*. Za več let kot si izposojamo, več denarja K bomo morali vrniti: $K = G + R$, torej $K = G + npG$, to je

$$K = G(1 + np)\,. \tag{5.5}$$

Zapisana *obrestna enačba* pove, kako izračunati *neznano količino* (*neznanko*) K, če poznamo *znane količine* (*parametre*) G, n in p. Tipična obrestna mera znaša $p = 0{,}05$. Če si izposodimo $G = 100$ denarjev za $n = 5$ let, moramo tedaj vrniti $K = 100(1 + 5 \cdot 0{,}05)$ denarjev, torej $K = 125$ denarjev. Očitno se posojilodajalcu izplača dajati posojila in pri tem bogateti brez dela. Tako se v družbi pojavijo poklicni posojilodajalci, bankirji.

Ugibanje neznanke

Kaj pa, če se – kot bankirji – vprašamo: kakšno obrestno mero p moramo zaračunati, če hočemo v 5 letih za posojilo 100 denarjev dobiti vrnjenih 150 denarjev? Za ta primer se obrestna enačba zapiše v obliki $150 = 100(1 + 5p)$ z neznanko p. Neznanka sedaj ne stoji sama na eni strani enačbe, ampak je zlepljena v nekakšen številski grozd. Naša naloga je, da določimo, za katero številsko vrednost neznanke je enačba *izpolnjena*, to je, da je njena leva stran enaka desni.

Enačbo lahko rešimo s poskušanjem: "v škatlico" p vstavljamo razna števila in pogledamo, ali so prava. Ugotovimo, da je takšno število 0,10. Tako smo našli *rešitev enačbe*; enačbo smo *rešili*.

Izračun neznanke

Morda lahko enačbo rešimo, ne da bi ugibali? To bi bilo vsekakor krasno. Postopamo takole. Levo in desno stran delimo s 100. S tem se enačba ne spremeni, vendar smo se na desni strani znebili enega faktorja in neznanko delno ogolili. Potem od leve in desne strani odštejemo 1; spet se enačba ne spremeni in neznanka se še bolj ogoli. Končno obe strani delimo s 5, ju zamenjamo med seboj (levo prestavimo na desno in desno na levo) ter dobimo rešitev: $p = (150/100 - 1)/5 = 0{,}10$.

Pravzaprav ni treba, da računamo s konkretnimi števili, ampak lahko rokujemo kar s splošnimi. Tedaj dobimo rešitev v obliki $p = (K/G - 1)/n$. Šele sedaj vstavimo konkretne vrednosti parametrov in dobimo konkreten rezultat. Tako vidimo, da z reševanjem splošne enačbe pravzaprav rešujemo neskončno množico konkretnih enačb – za vsak številski nabor parametrov po eno. Seveda lahko vsako količino v obrestni enačbi – K, G, n ali p – po potrebi obravnavamo kot neznanko in jo izrazimo s preostalimi. V vseh primerih nam to uspe. Izumili smo "algebrsko" reševanje enačb.

5.6 Obrestno obrestni račun

Obrestno obrestna enačba

Bankirji, ki dajo posojilo G, terjajo vrnitev kapitala K po znani obrestni enačbi (5.5). S tem pa niso zadovoljni. Pohlepno iščejo način, kako povečati dobiček. Razmišljajo takole. Ko sem A-ju posodil glavnico G po obrestni meri p za n let, sem se po prvem letu pravzaprav odrekel razpolaganju z $G(1 + p)$ denarja, kolikor bi ga dobil, če bi dal le enoletno posojilo. Ta denar bi lahko posodil B-ju in v naslednjem letu zaslužil $G(1 + p)(1 + p)$ denarja. Pravično je torej, da A-ju posojam tako, da nisem na opisani izgubi, torej pod pogojem, da po n letih vrne

$$K = G(1 + p)^n \,. \qquad (5.6)$$

To je *obrestno obrestna enačba*. Koliko je poštena, ne bomo razglabljali. Dejstvo je, da predpisuje, kako izračunati K iz znanih G, n in p. Zmeraj naračuna več kot navadna obrestna enačba. Razlika je tem večja, čim bolj dolgoročno je posojilo. Marsikaterega dolžnika je spravila na kant ali celo na drugi svet.

Izračun neznank

Obrestno obrestna enačba povezuje štiri količine. Katerakoli izmed njih je lahko neznanka – odvisno pač od tega, kaj nas zanima. Pričakujemo, da je vsako mogoče eksplicitno izraziti s preostalimi tremi. Neznanka K je tako že izražena. Neznanko G izračunamo z deljenjem obeh strani enačbe: $G = K/(1 + p)^n$. Neznanko p izluščimo z obojestranskim deljenjem, korenjenjem in odštevanjem: $p = \sqrt[n]{(K/G)} - 1$. Neznanke n pa se zaenkrat ne znamo lotiti.

Vrste enačb

Glede na to, katero "neznanko x" – K, G, p ali n – preučujemo, zavzame obrestno obrestna enačba eno izmed naslednjih treh oblik: $Ax = B$, $Ax^n = B$ in $A^x = B$. Prvo obliko imenujemo *linearna enačba*; drugi obliki rečemo *potenčna enačba*, ker neznanka nastopa kot osnova potence; in tretjo obliko, v kateri je neznanka eksponent potence, krstimo za *eksponentno enačbo*. Kako kakšno izmed teh enačb rešimo, že vemo: na obe strani vplivamo enako in sicer tako, da na eni strani pridelamo golo neznanko x. Za linearno enačbo dobimo $x = B/A$; za potenčno $x = \sqrt[n]{(B/A)}$; za eksponentno enačbo pa bomo morali ustrezne računske operacije še odkriti oziroma izumiti. □