4 Ulomna števila

Deli celote – Ulomki – Računanje z ulomki – Decimalna števila – Računanje z decimalnimi števili

4.1 Deli celote

Pri gradnji templjev se svečeniki srečajo z mnogimi težavami. Med drugim morajo učinkovito načrtovati prehrano za delavce. Tipična prehrana so hlebci kruha ali sira in te je treba rezati na kose, jih razdeljevati ter o vsem voditi evidenco.

Rezanje hlebca

Kot svečeniki in pisarji (AHMES) se izziva lotimo postopno. Začnemo z najpreprostejšim primerom – z enim samim hlebcem. V mislih ali zares ga prerežemo na dva enaka kosa in enega ali oba položimo v košaro. Rečemo, da vsebuje košara eno ali dve *polovici* hlebca. Seveda lahko hlebec razrežemo tudi na drugačno število enakih kosov, na primer na tri, in potem v košaro denemo eno, dve ali tri *tretjine* hlebca. Kosi kruha v košari so množica, katere elementi niso več enote (hlebci), pač pa deli te enote (kosi hlebca). Velikost omenjenih množic zapišemo kot 1/2, 2/2, 1/3, 2/3 ali 3/3. Spodnje število pove, o kakšnih delih celote je govora, in zgornje, koliko je teh delov.

4.2 Ulomki

Ulomna števila

Nasploh lahko hlebec razrežemo na m enakih kosov in jih n položimo v košaro. Rekli bomo, da je v njej n/m hlebca in zapisani izraz proglasili za *ulomno število* oziroma *ulomek*. Z naravnimi števili opisujemo, koliko je v množici celih enot, z ulomnimi števili pa, koliko je njihovih delov. Tako štejemo, na primer, osminke hlebca kruha ali četrtinke vrča piva. Število m poimenujemo *imenovalec* in število n *števec* ulomka. Imenovalec pove, o kakšnih delih celote je govora, in števec, koliko je teh delov. Števec je lahko manjši, enak ali večji od imenovalca. V prvem primeru rečemo, da je ulomek *pravi*, in v drugih dveh, da je *nepravi*. Nepravi ulomek skriva v sebi eno ali več celih enot. Koliko jih je, določimo z deljenjem števca z imenovalcem: količnik pove število celih enot in preostanek pove število pravih ulomnih enot. Tako, na primer, velja $22/7 = 3 + 1/7$, kar na kratko zapišemo kot $3^1/_7$. Rekli bomo, da je to "mešano" število.

Razširjanje in krajšanje

Naj bo v košari n/m hlebca, torej n kosov, od katerih je vsak velik m-tino hlebca. Ko vsak kos kruha v košari razrežemo na k delov, dobimo $k \cdot n$ kosov, od katerih je vsak velik $(k \cdot m)$-tino hlebca, in velja izrek o *širjenju* oziroma *krajšanju* ulomkov:

$$\frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{k \cdot m}\,. \tag{4.1}$$

Ulomek se torej ne spremeni, če števec in imenovalec pomnožimo ali delimo z istim številom. Tako ulomek 6/10, na primer, zgoraj in spodaj delimo s številom 2 in dobimo lepšo obliko 3/5. Rečemo, da smo ulomek okrajšali.

Velikost ulomkov

Kakor je kos hlebca manjši od celega hlebca, tako je tudi vsak pravi ulomek očitno "manjši" od enote. Ulomkom kot novi zvrsti števil torej lahko pripišemo velikost. Od dveh ulomkov, ki imata enak imenovalec, je tisti z večjim števcem očitno večji. Kadar sta imenovalca različna, pa moramo oba ulomka razširiti v obliko z enakim imenovalcem; v najslabšem primeru je to produkt obeh izvornih imenovalcev. Potem tudi zanju postane razvidno, kateri je večji oziroma manjši.

4.3 Računanje z ulomki

Seštevanje in odštevanje

Združevanje kosov kruha iz dveh košar nas navaja na naslednjo definicijo seštevanja ulomkov: dva ulomka z istim imenovalcem se seštejeta tako, da se seštejeta oba števca, imenovalec pa pridrži. Kadar imata ulomka različne imenovalce, ju je potrebno najprej pretvoriti na skupni imenovalec. Podobno vodi odvzemanje kosov kruha iz košare do definicije za odštevanje ulomkov. Tako velja:

$$\begin{aligned} \frac{k}{m} \pm \frac{l}{m} &= \frac{k \pm l}{m} \\ \frac{k}{m} \pm \frac{l}{n} &= \frac{kn \pm lm}{mn} \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Množenje

Združevanje k košar, od katerih je v vsaki n/m hlebca, vodi do skupka

$$k \cdot \frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{m} \,; \tag{4.3}$$

s tem smo definirali množenje ulomka z naravnim številom.

Razdelitev n/m hlebca na l delov izvedemo tako, da razdelimo vsak kos posebej in dobimo $(n/m) : l = (n : l)/m$. Ker n v splošnem ni deljiv z l brez ostanka, razširimo zapisani ulomek s faktorjem l v obliko $(n{:}l)/m = n/(ml)$. S tem smo definirali deljenje ulomka z naravnim številom:

$$\frac{n}{m} : l = \frac{n}{ml} \,. \tag{4.4}$$

Ker ulomek k/l pomeni hkrati množenje enote s k in njeno deljenje z l, je ustrezno definirano tudi množenje ulomkov:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{k}{l} = \frac{nk}{ml} \,. \tag{4.5}$$

Deljenje

Definirati hočemo še deljenje ulomkov n/m in k/l. Oba ulomka najprej razširimo na skupni imenovalec: nl/ml in mk/ml. Ker je imenovalec pri obeh enak, je očitno, da mora biti kvocient ulomkov kar enak kvocientu števcev: nl/mk. V tem kvocientu prepoznamo produkt prvega ulomka z "obrnjenim" drugim ulomkom. Tako torej velja

$$\frac{n}{m} : \frac{k}{l} = \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{k}\,. \tag{4.6}$$

S tem je deljenje opredeljeno kar preko množenja.

Računski zakoni

Ulomki so razširitev naravnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer, ko je imenovalec enak ena, na primer $3 = 3/1$. Računske operacije nad njimi so – zaradi privzetih definicij – podložne istim zakonom (2.1) kot pri naravnih številih: vsota in produkt ulomkov sta komutativna in aditivna, produkt pa je še distributiven glede na vsoto. Poljubno ulomno število bomo odslej, kadar bo to potrebno, označevali s črkami p, q ali r.

4.4 Decimalna števila

Desetiški ulomki

Med ulomki so nekaj posebnega tisti, ki imajo za imenovalec 10, 100, 1000 in tako naprej. Imenujemo jih *desetiške ulomke*. Desetiški ulomki kar kličejo po tem, da jih zapišemo na podoben način, kakor naravna števila. Slednja zapisujemo z enicami E, deseticami D, stoticami S, tisočicami T itd; zakaj torej ne bi prvih zapisovali z desetinami d, stotinami s, tisočinami t itd? Drugače rečeno: naravna števila v desetiškem zapisu $TSDE$ razširimo z dodanim ulomnim delom v obliko $TSDE{,}dst$. Tako na primer zapišemo $3/10 = 0{,}3$, $5/100 = 0{,}05$ in $35/100 = 3/10 + 5/100 = 0{,}35$. Zapis opremimo z vejico, da ločimo celi del od ulomnega. To je *decimalni zapis* ulomkov in števila z decimalno vejico so *decimalna števila*. Številkam, ki sledijo decimalni vejici, rečemo *decimalke*.

Nedesetiški ulomki

Kaj pa nedesetiški ulomki? Tak ulomek poskušamo spremeniti v desetiškega z razširjanjem. Ker so vse desetiške enote sestavljene zgolj iz faktorjev 2 in 5 ($10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$), je razširjanje mogoče le, če je tudi imenovalec sestavljen samo iz faktorjev 2 in 5. Tako, na primer, velja $1/2 = 5/10 = 0{,}5$ in $3/25 = 12/100 = 0{,}12$. V ostalih primerih se je treba zadovoljiti s približno pretvorbo na željeno število decimalk. Zgled, na dve decimalki, je: $2/7 = (2/100) \cdot (100/7) \approx (2/100) \cdot 14 = 0{,}28$. Zadnja decimalka je negotova za $\pm\,0{,}01$.

4.5 Računanje z decimalnimi števili

Ker so decimalna števila zapisana v mestnem desetiškem sistemu, računamo z njimi prav tako kot z naravnimi števili, le na decimalno vejico moramo paziti.

Seštevanje in odštevanje

Pri seštevanju poravnamo obe števili glede na decimalno vejico in seštevamo, kot da vejic ne bi bilo. V rezultatu potem postavimo vejico pod obe obstoječi. Podobno ravnamo pri odštevanju.

Množenje

Pred množenjem dveh števil (v mislih) premaknemo decimalno vejico v prvem faktorju za toliko mest v desno, da ta postane naravno število, in prav tako naredimo v drugem faktorju. Tako smo nakazani produkt množili z dvema desetiškima enotama. Nato oba faktorja zmnožimo, ne meneč se za "izginuli" decimalni vejici. Izračunani produkt, ki je naravno število, moramo sedaj le še deliti z obema desetiškima enotama, da dobi pravo vrednost. To naredimo tako, da vanj postavimo decimalno vejico za toliko mest v levo, kolikor decimalk imata oba faktorja skupaj.

Deljenje

Delimo tako, da najprej v delitelju premaknemo decimalno vejico za toliko mest v desno, da postane naravno število, in za prav toliko premaknemo tudi vejico v deljencu. S tem smo obe števili pomnožili z isto desetiško enoto in vrednosti količnika nismo spremenili. Nato števili delimo in ko pridemo do koraka, da moramo k tekočemu ostanku pripisati desetine, to v nastajajočem količniku obeležimo z vejico. Deljenje nadaljujemo, dokler ostanek ne postane nič oziroma ko dosežemo željeno število decimalk.

Računski zakoni

Decimalna števila niso nič drugega kot (pravi ali nepravi) desetiški ulomki, zapisani v mestnem zapisu. Zato za računske operacije nad njimi – seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje – veljajo isti zakoni kot za operacije nad kakršnimikoli ulomki, torej navsezadnje tisti zakoni (2.1), ki veljajo za operacije nad naravnimi števili. Decimalna števila so razširitev naravnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer z "neskončno" ničlami za decimalno vejico, na primer $3 = 3{,}0\ldots$ Tudi poljubno decimalno število bomo odslej, kadar bo to potrebno, označevali s črkami p, q ali r. □