18 Diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe – Enačbe prvega reda – Enačbe drugega reda – Advekcijska enačba – Valovna enačba – Difuzijska enačba – Potencialna enačba – Amplitudna enačba

18.1 Diferencialne enačbe

Iz fizike poznamo naslednje. Premik ds telesa v kratkem časovnem intervalu dt je odvisen od njegove hitrosti v: $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$; pospešek telesa $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$ je odvisen od sile F nanj: $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 = F/m$; in tudi mnoge druge spremembe v naravi so opisane z enačbami, v katerih nastopajo odvodi/diferenciali količin. To so *diferencialne enačbe*. Na splošno zapišemo "navadno" diferencialno enačbo v obliki $F(u,t,u',u''\ldots) = 0$. Glede na to, katerega reda je najvišji diferencial, razlikujemo enačbe prvega, drugega in višjih redov. Rešitev diferencialne enačbe je funkcija $u(t)$, ki tej enačbi zadošča.

Spremembe funkcij več spremenljivk, tipično časa in prostora, opisujejo enačbe, ki vsebujejo parcialne odvode. To so *parcialne diferencialne enačbe*. Takšna je, na primer, lokalna sprememba koncentracije primesi v zračnem toku v odvisnosti od lokalnega gradienta koncentracije: $\partial Q/\partial t = c\,\partial Q/\partial x$. Za funkcijo dveh spremenljivk ima parcialna diferencialna enačba splošno obliko $F(u, x, y, u_x, u_y, u^2{}_{xx}, u^2{}_{yy}, u^2{}_{xy}\ldots) = 0$. Njena rešitev je taka funkcija $u(x,y)$, ki enačbi zadošča. Podobno velja za funkcije treh in več spremenljivk. Poglejmo in rešimo tipične enačbe, navadne in parcialne, ki jih srečamo v fiziki!

18.2 Enačbe prvega reda

Trivialne enačbe

Najpreprostejše enačbe so naslednje:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t) \qquad (18.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t)g(u)\,.$$

Vse rešujemo na enak način – z ločevanjem spremenljivk in integriranjem, na primer:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{g(u)} = \int f(t)\mathrm{d}t\,. \qquad (18.2)$$

Če imamo srečo, pridela integracija *splošno rešitev* v eksplicitni obliki $u = \xi(t) + C$. Z zahtevo, da je izpolnjen *začetni pogoj* $u(0) = u_0$, je konstanta C enolično določena in dobimo *posebno rešitev* enačbe.

Linearna enačba

Bolj zapletena je enačba

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + f(t)u = g(t)\,. \tag{18.3}$$

Na obeh straneh jo pomnožimo s še neznano funkcijo $w(t)$, jo spravimo pod diferencial (pri tem pridelamo dodatni člen, ki ga moramo odšteti) in dobimo $\mathrm{d}(uw)/\mathrm{d}t - [u\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}t + uwf] = wg$. Izberemo tak w, da je izraz v oglatem oklepaju nič, torej:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + fw = 0\,. \tag{18.4}$$

To je separabilna enačba $\mathrm{d}w/w = -f\mathrm{d}t$ z integralno rešitvijo $w = C\exp(-\int f\,\mathrm{d}t)$. Preostane enačba

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + wg = 0 \tag{18.5}$$

$$\xi = uw\,,$$

ki je spet separabilna; iz nje izračunamo ξ ter potem $u = \xi/w$.

Splošna enačba

Splošno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u,t) \tag{18.6}$$

rešujemo z nastavkom v obliki potenčne vrste. Nastavek $u(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots$ vstavimo v enačbo, izračunamo, kar je treba, in uredimo dobljene člene po naraščajočih potencah t^n, vse na isti strani enačbe. Koeficient pred vsako potenco (vsebujoč različne a_i) mora biti enak nič. Posamezne a_i določimo iz teh pogojev rekurzivno.

18.3 Enačbe drugega reda

Trivialne enačbe

Prototipne enačbe drugega reda so enačbe gibanja: opisujejo, kako se giblje telo pod vplivom sil. Najpreprostejše enačbe

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = f(t) \tag{18.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = f(s)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = f(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})$$

rešujemo s substitucijo $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$, ki pripelje na enačbo prvega reda: $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(t)$ ali $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t) = v\mathrm{d}v/\mathrm{d}s = f(s)$ ali $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$. Vsaka dobljena enačba je separabilna in jo rešimo na v, potem pa z njim iz substitucijske enačbe izračunamo še s. Pri tem pridelamo dve nedoločeni konstanti. Določimo ju iz dveh začetnih pogojev $s(0) = s_0$ in $s'(0) = v(0) = v_0$.

Prosto nihanje

Bolj zapletene so linearne enačbe s konstantnimi koeficienti; opisujejo razne vrste nihanj. Najbolj preprosta med njimi je enačba prostega nihanja:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 s = 0\,. \tag{18.8}$$

Kakšna je njena rešitev, pravi kar enačba sama: drugi odvod katere funkcije je spet ta funkcija, vendar z nasprotnim predznakom? To je sinus ali kosinus. Nastavek $s = \cos \omega t$ pove $\omega = \omega_0$. Podobno velja za nastavek $s = \sin \omega t$. Splošna rešitev je linearna kombinacija obeh delnih rešitev:

$$s = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t\,. \tag{18.9}$$

Konstanti A_1 in A_2 določimo iz začetnih pogojev $s(0) = s_0$ in $s'(0) = v_0$.

Opazimo tudi naslednje. Zapisana nihajna enačba (18.8) je pravzaprav realni (ali imaginarni) del kompleksne enačbe s povsem enako obliko, le da je v njej količina $\hat{s} = (x + \mathrm{i}y)$ kompleksna: $(x + \mathrm{i}y)'' + {\omega_0}^2 (x + \mathrm{i}y) = 0$ pomeni $(x'' + {\omega_0}^2 x) + \mathrm{i}(y'' + {\omega_0}^2 y) = 0$, to je par "navadnih" enačb. Zato jo lahko rešujemo tudi s kompleksnim nastavkom $\hat{s} = (s_0 \exp \mathrm{i}\delta) \exp \mathrm{i}\omega t$. Ko ga vstavimo v nihajno enačbo, dobimo $(\mathrm{i}\omega)^2 + {\omega_0}^2 = 0$, torej $\omega = \omega_0$. Tako realni kot imaginarni del kompleksnega nastavka sta iskani rešitvi: $s = s_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$ ali $s = s_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$. Konstanti s_0 in δ določimo iz začetnih pogojev. Če upoštevamo še obrazec za sinus ali kosinus vsote (10.15), pa dobimo rešitev v obliki $s = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$. Novi konstanti se izražata s starima: ${s_0}^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2$ in $\tan \delta = -A_2/A_1$.

Vzbujeno nihanje

Gibanje nihala, na katerega deluje dodatni zunanji harmonični vpliv s frekvenco ω, opisuje enačba

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 s = A \cos(\omega t + \delta)\,. \tag{18.10}$$

Zapisano enačbo razširimo v kompleksno obliko $\hat{s}'' + {\omega_0}^2 \hat{s} = \hat{A} \exp \mathrm{i}\omega t$, pri čemer $\hat{A} = A \exp \mathrm{i}\delta$. Za rešitev pričakujemo nihanje z isto frekvenco kot zunanji vpliv, zato izberemo nastavek $\hat{s} = \hat{s}_0 \exp \mathrm{i}\omega t$, pri čemer $\hat{s}_0 = s_0 \exp \mathrm{i}\theta$, in ga vtaknemo v nihajno enačbo. Dobimo $(\mathrm{i}\omega)^2 \hat{s}_0 + {\omega_0}^2 \hat{s}_0 = \hat{A}$, torej $\hat{s}_0 = \hat{A}/({\omega_0}^2 - \omega^2)$. Količini $\hat{s}_0$ in $\hat{A}$ sta povezani z realnim sorazmernostnim faktorjem, zato sta njuni fazi enaki in velja

$$s = s_0 \cos(\omega t + \delta) \tag{18.11}$$
$$s_0 = \frac{A}{\surd({\omega_0}^2 - \omega^2)}\,.$$

Nihalo niha harmonično z isto frekvenco ω kot vzbujevalec. Čim manjša je razlika med frekvenco vzbujevalca in lastno frekvenco ω_0 nihala, tem večja je amplituda s_0 nihanja. Ko sta frekvenci enaki, je amplituda neskončna. Rečemo, da je nihalo v *resonanci* z vzbujevalcem. Seveda nastopa v naravi trenje/upor, ki ga nismo upoštevali, in so zato vzbujene amplitude končne.

Vzbujano nihanje z dušenjem

Vzbujeno nihanje z linearnim uporom zapišemo z enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s = A \cos(\omega t + \delta)\,. \tag{18.12}$$

Postopamo enako kot pri nedušenem vzbujanju in pridelamo enačbo $\hat{s}_0 = \hat{A}/(\omega_0 - \omega + \mathrm{i}\gamma\omega) = \hat{R}\hat{A}$. To enačbo zapišemo v obliki $\hat{s}_0 = R\exp \mathrm{i}\theta \cdot A \exp \mathrm{i}\delta = RA \exp \mathrm{i}(\theta + \delta)$. Realni del leve strani je enak realnemu delu desne strani, zato

$$s = RA\cos(\omega t + \delta + \theta)\,. \tag{18.13}$$

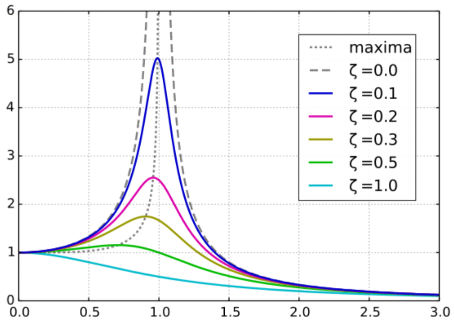
Nihanje je harmonično s frekvenco vzbujevalca, vendar je časovno zamaknjeno. Amplituda je določena z R in faza s θ. Določimo ju! Definicijski izraz za $\hat{R}$ kvadriramo, to je, pomnožimo ga s konjugirano vrednostjo, in dobimo:

$$R = \frac{1}{\sqrt{[(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}}\,. \tag{18.14}$$

Recipročni izraz za $\hat{R}$ preoblikujemo takole: $1/\hat{R} = 1/R\exp \mathrm{i}\theta = (1/R)\exp(-\mathrm{i}\theta) = ({\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega)$. Realni del dobljenega izraza je $\cos\theta$ in imaginarni del je $-\sin\theta$. Njuno razmerje pove

$$\tan\theta = \frac{-\gamma\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\,. \tag{18.15}$$

Pri nizkih vzbujevalnih frekvencah nihalo kar sledi vzbujevalcu. Pri visokih stoji pri miru, saj nima časa, da bi mu sledilo. Trenje poskrbi, da je resonantno ojačanje končno. Nihanje vedno kasni za vzbujevanjem. Kasnenje narašča s frekvenco. V resonanci kasni natanko za četrt nihaja.



Slika 18.1 Resonantna krivulja pri različnh dušenjih. Na abscisi je razmerje ω/ω_0 in na ordinati ojačanje amplitude R. (Anon.)

Dušeno nihanje

Preostane še dušeno nihanje:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s = 0\,. \tag{18.16}$$

Na enačbo pogledamo, kot da je kompleksna. Pričakujemo nihanje z zmanjševanjem amplitude s časom in zato poskusimo z nastavkom $\hat{s} = \exp \mathrm{i}\hat{r}t$ s kompleksnim $\hat{r}$. Kompleksni eksponent namreč vsebuje realni in imaginarni del, ki poskrbita za oboje – dušenje in nihanje. Dobimo $(-\hat{r}^2 + \mathrm{i}\gamma\hat{r} + \omega_0{}^2)\exp \mathrm{i}\hat{r}t = 0$. Prvi faktor mora biti enak nič, to pa je pri $\hat{r} = \mathrm{i}\gamma/2 \pm \sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2/4)}$ oziroma okrajšano $\hat{r} = \mathrm{i}\gamma/2 \pm \omega$. Privzemimo, da je dušenje tako majhno, da je podkorenski izraz pozitiven. Tedaj je frekvenca ω realna. Potem dobimo rešitev $\hat{s} = \exp(-\gamma t/2)\,[c_1 \exp(\mathrm{i}\omega t) + c_2 \exp(-\mathrm{i}\omega t)]$. Da bomo kompleksno rešitev reducirali na realno, moramo postaviti $c_2 = c_1{}^*$ oziroma obratno in dobimo

$$s = s_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta) \qquad (18.17)$$
$$\omega = \sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2)},\ \gamma < \omega_0\,.$$

Nihanje je harmonično z manjšo frekvenco kot pri prostem nihanju, amplitude pa so eksponentno dušene. Če je dušenje premočno, si zlahka predstavljamo, da do nihanja sploh ne pride, ampak preostane le eksponentno pojemanje. Računsko pa se tega ne bomo lotili.

Splošna enačba

Splošno enačbo drugega reda

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = f(u,t,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}) \qquad (18.18)$$

rešujemo z nastavkom s potenčno vrsto, prav tako kot enačbo prvega reda (18.6).

18.4 Advekcijska enačba

Transport primesi ali temperature s konstantnim snovnim tokom opisuje *advekcijska enačba*

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -c\,\frac{\partial Q}{\partial x}\,. \qquad (18.19)$$

Konstanta c je hitrost toka. Če je pozitivna, teče tok v smeri osi x, sicer pa v nasprotni smeri. Ker je tok konstanten v prostoru in času, se začetni oblak primesi $Q(x,0) = F(x)$ zgolj translatorno premakne in se nič ne deformira. Na neomejenem območju $[-\infty,+\infty]$ ima torej enačba rešitev

$$Q(x,t) = F(x - ct) \qquad (18.20)$$

s poljubno funkcijo F. V to se prepričamo z neposrednim odvajanjem. Na omejenem območju $[0,l]$ je treba pri toku z leve $(c > 0)$ poleg začetnega profila specificirati še levi robni pogoj, recimo $u(0,t) = 0$. Če prihaja tok z desne, pa je potreben desni robni pogoj.

18.5 Valovna enačba

Snovni ali elektromagnetni valovi se pokoravajo *valovni enačbi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \qquad (18.21)$$

Neomejen prostor

Enačbo zapišemo v obliki $(\partial^2/\partial t^2 - c^2\partial^2/\partial x^2)u = 0$, jo "faktoriziramo" v $(\partial/\partial t - c\partial/\partial x)(\partial/\partial t + c\partial/\partial x)u = 0$ ter pridobimo dve advekcijski enačbi. S tem smo našli tudi splošno rešitev na neomejenem področju:

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \tag{18.22}$$

Funkciji F in G sta poljubni. Začetni profil $u(x,0) = F(x) + G(x)$ je sestavljen iz dveh delov, od katerih se vsak giblje v svojo stran v nespremenjeni obliki. Da je splošna rešitev res prava, se prepričamo z neposrednim odvajanjem.

Omejen prostor

Na omejenem področju $[0,l]$ sta poleg dveh začetnih pogojev $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$ potrebna še dva robna pogoja; najpreprosteje $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Iščemo rešitve v obliki $u(x,t) = X(x)T(t)$. Vstavitev v valovno enačbo pove $X_{xx}/X = T_{tt}/c^2T$. Leva strann je odvisna samo od x in desna samo od t. To je možno le, če je vsaka stran enaka isti konstanti, $-\lambda$. Rešitev leve enačbe je $\sin\sqrt{\lambda}x$ ali $\cos\sqrt{\lambda}x$ ali linearna kombinacija obeh. Da ustrežemo levemu pogoju, vzamemo sinus, desnega pa zadovoljimo z izbiro konstante $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$. Rešitev druge enačbe sta sinus ali kosinus argumenta $\sqrt{\lambda}ct = n\pi ct/l$ oziroma njuna linearna kombinacija, torej

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(a_n\cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n\sin\frac{n\pi ct}{l}\right). \tag{18.23}$$

Da ustrežemo začetnima pogojema, mora veljati $u(x,0) = f(x) = \sum a_n \sin n\pi x/l$ in $u'(x,0) = g(x) = \sum (n\pi c/l)\, b_n \sin n\pi x/l$. Koeficienti so torej

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \tag{18.24}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,.$$

Če $g(x) = 0$, so časovno odvisni členi v rešitvi le kosinusi; osnovna frekvenca nihanja znaša $\omega_1 = \pi c/l$, ostale pa so njeni celoštevilčni mnogokratniki.

18.6 Difuzijska enačba

Za difuzijo primesi ali temperature v mirujoči snovi velja *difuzijska enačba*

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\,,\quad D > 0\,. \tag{18.25}$$

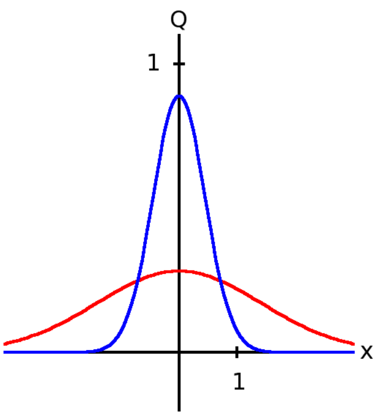
Neomejen prostor

Naj bo prostor za difuzijo neomejen. Najpreprostejši začetni profil primesi je oster vrh pri $x = 0$. Gibanje delca primesi po ozadju snovnih molekul spominja na kotaljenje kroglice po ožlebljeni deski (pri fiziki). Porazdelitev kroglic po odmiku od središčne lege je normalna. Domnevamo, da je tako tudi pri difuziji delcev primesi: okrog začetne lege se bodo razpršili normalno in ta razpršitev se bo sčasoma širila in nižala. Zato izberemo nastavek $Q = 1/\sqrt{(2\pi a)} \cdot \exp(-x^2/2a)$, pri čemer je a neznana funkcija časa. Vstavimo ga v difuzijsko enačbo (18.25) in ugotovimo, da ji zadošča, ako $a = 2Dt$. To torej pomeni, da je rešitev

$$Q(x,t) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{(2\pi)}} \exp \frac{-x^2}{2\sigma_x{}^2} \qquad (18.26)$$
$$\sigma_x{}^2 = 2Dt\,.$$

O pravilnosti se prepričamo tako, da rešitev vstavimo v difuzijsko enačbo.

Normalna rešitev v dveh dimenzijah je produkt normalnih rešitev v posamičnih dimenzijah. Dobimo jo, če nadomestimo $x^2 \to \rho^2$ in $\sigma_x{}^2 \to \sigma_\rho{}^2 = 4Dt$. Podobno velja za tri dimenzije: $x^2 \to r^2$ in $\sigma_x{}^2 \to \sigma_r{}^2 = 6Dt$.



Slika 18.2 Difuzija točkastega izvora. Prikazana je enodimenzionalna difuzija za $D = 1$ in ob časovnih enotah 0.01 (modra) ter 1 (rdeča).

Kaj pa, če začetni profil v neomejenem prostoru ni točkast, ampak je razmazan v oblak? Potem je gotovo težko – če sploh – najti analitično rešitev. S tem se ne bomo ukvarjali.

Omejen prostor

Prostor, v katerem poteka difuzija, je lahko tudi omejen s stenami take ali drugačne vrste. Poleg začetnega profila po vsem prostoru so potem merodajni tudi robni pogoji, ob vseh časih, na teh stenah. Na omejenem področju $[0,l]$ sta poleg začetnega pogoja potrebna torej še dva robna pogoja; najpreprosteje je, da sta oba nič: $Q(0,t) = Q(l,t) = 0$. Postopamo tako kot pri valovni enačbi. Nastavek $Q(x,t) = X(x)T(t)$ pove $X_{xx}/X = T_t/DT$. Leva stran je odvisna samo od x in desna samo od t. To je možno le, če je vsaka stran enaka isti konstanti, $-\lambda$. Rešitev leve enačbe je $\sin\sqrt{\lambda}x$ ali $\cos\sqrt{\lambda}x$ ali linearna kombinacija obeh. Da ustrežemo levemu pogoju, vzamemo sinus, desnega pa zadovoljimo z izbiro konstante $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$. Desna enačba ima rešitev $\exp(-\lambda Dt)$. Celotna rešitev je torej linearna kombinacija

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} \exp \frac{-n^2\pi^2 Dt}{l^2} \,. \tag{18.27}$$

Koeficiente c_n izberemo tako, da rešitev zadošča začetnemu pogoju $Q(x,0) = \sum c_n \sin(n\pi x/l)$. To je razvoj v trigonometrično vrsto sinusov, torej

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l Q(x,0) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \,. \tag{18.28}$$

Drugačne robne pogoje obravnavamo takole. Pogoja $Q(0,t) = Q(l,t) = A$ prevedemo na nič s premikom skale $Q \to Q + A$. Pri pogojih $Q_x(0,t) = Q_x(l,t) = 0$ pa vzamemo za krajevne funkcije kosinuse.

18.7 Potencialna enačba

Na okvir napeta elastična opna ali med prevodnike napeto električno polje zadoščata *potencialni enačbi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{18.29}$$

Na kvadratnem območju

Na omejenem kvadratnem območju $[0,a] \times [0,b]$ naj bodo robne vrednosti iskane funkcije povsod enake nič, le na desnem robu naj velja $u(a,y) = f(y)$. Ločitev spremenljivk privede do dveh enačb $X_{xx} - \lambda X = 0$ in $Y_{yy} + \lambda Y = 0$. Rešitev druge enačbe, ki zadošča robnima pogojema, je $\sin\sqrt{\lambda}y$, pri čemer $\sqrt{\lambda} = n\pi/b$. Prva enačba in upoštevanje levega robnega pogoja pa zahtevata rešitev $\sinh\sqrt{\lambda}x$. Pri tem je $\sinh\alpha = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$. Iskana funkcija je superpozicija

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a} \,. \tag{18.30}$$

Koeficiente c_n izberemo tako, da uresničimo desni robni pogoj $f(y) = \sum c_n \sinh n\pi a/b \cdot \sin n\pi y/b$, to je

$$c_n = \frac{2}{b \sinh n\pi a / b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, dy \,. \tag{18.31}$$

Če so robni pogoji predpisani z normalnimi odvodi, od katerih so vsi razen desnega enaki nič, se v rešitvi pojavita funkciji cos in cosh. Pri tem je $\cosh\alpha = (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$. Ločitev spremenljivk je mogoča le tedaj, ko sta funkcija ali njen normalni odvod enaka nič na treh stranicah. Drugače pa zapišemo funkcijo u kot vsoto štirih funkcij, pri katerih je vsakokrat druga stranica različna od nič.

18.8 Amplitudna enačba

Amplitude stojnega valovanje na struni, opni ali v prostorski votlini opisuje *amplitudna enačba*

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0, k = \omega / c\,. \tag{18.32}$$

Struna

Za struno dolžine l, vpeto na obeh straneh, se amplitudna enačba zapiše kot

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} + k^2 A = 0\,. \tag{18.33}$$

Očitno ji zadoščajo sinusni valovi s celim številom polvalov med obema krajiščema:

$$A_n = \sin(k_n x) \qquad k_n l = n\pi, n = 0, 1, 2\ldots \tag{18.34}$$

Struna lahko niha s kakršnokoli linearno kombinacijo osnovnih rešitev. Rezultat velja tudi za piščal, ki je na obeh straneh odprta, le da v tem primeru sinuse nadomeščajo kosinusi.

Kvadratna opna

Najpreprostejši dvodimenzionalni primer nudi kvadratna opna $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. Amplitudno enačbo zapišemo v kartezičnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\mathrm{d}y^2} + k^2 A = 0\,. \tag{18.35}$$

Rešitev iščemo z nastavkom $A(x, y) = X(x)Y(y)$. Dobimo $X"/X + Y"/Y = -k^2$. To je možno le, če je vsak izmed obeh členov enak konstanti: $X"/X = -{k_x}^2$ in $Y"/Y = -{k_y}^2$, pri čemer ${k_x}^2 + {k_y}^2 = k^2$. Rešitvi teh dveh enačb sta sinus ali kosinus. Da zadostimo pogoju na mejah $x = 0$ in $y = 0$, izberemo $\sin k_x x$ in $\sin k_y y$. Da zadostimo še pogoju na mejah $x = a$ in $y = b$, pa postavimo $k_x = m\pi/a$ in $k_y = n\pi/b$, $m, n = 1, 2, 3\ldots$ Iskane rešitve so torej

$$A_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\,, \tag{18.36}$$

Katerakoli izmed teh rešitev, recimo A_{11}, je dobra, prav tako pa katerakoli njihova linearna kombinacija. Frekvenca nihanja znaša

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2\,. \tag{18.37}$$

Krožna opna

Za krožno opno $\rho \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ zapišemo amplitudno enačbo v cilindričnih koordinatah, upoštevajoč [17.7]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + k^2 A = 0\,. \tag{18.38}$$

Izberemo nastavek $A = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ter ga vstavimo vanjo. Če dobljeno enačbo pomnožimo še z ρ^2, postane njen drugi člen $(1/\Phi)\mathrm{d}^2\Phi/\mathrm{d}\varphi^2$, torej neodvisen od ρ, zato mora biti enak konstanti, ki jo zapišemo kot $-n^2$. Tako dobimo dve ločeni enačbi:

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + [(k\rho)^2 - n^2]R = 0 \tag{18.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + n^2\Phi = 0\,.$$

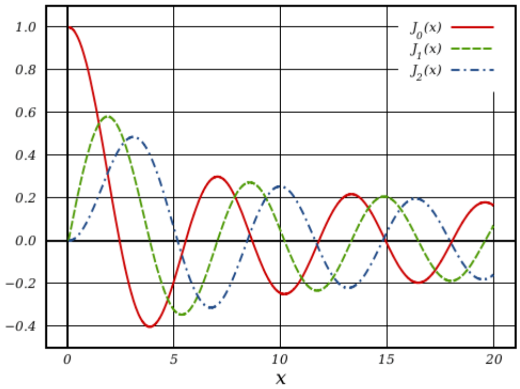
Rešitev druge enačbe je sinus ali kosinus argumenta $n\varphi$. Zanj moramo upoštevati periodični mejni pogoj $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, kar pomeni, da mora biti n celo število $0, 1, 2, 3 \ldots$ in

$$\Phi(\varphi) = \cos n\varphi\,. \tag{18.40}$$

Prvo enačbo polepšamo z vpeljavo spremenljivke $k\rho = t$ v obliko $t^2R'' + tR' + [t^2 - n^2] = 0$. Rešitev iščemo z nastavkom v obliki potenčne vrste $R(t) = t^n \sum c_j t^j$. Vstavimo ga v enačbo in dobimo $\sum (n+j)^2 c_j t^{n+j} + [t^2 - n^2] \sum c_j t^{n+j} = 0$. Koeficiente c_j moramo zdaj tako izbrati, da bo enačba veljala. S precej truda najdemo

$$R(k\rho) = \sum_j^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!}\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2j+n} = J_n(k\rho)\,. \tag{18.41}$$

Funkcije $J_0, J_1 \ldots$ poimenujemo *cilindrične funkcije*.



Slika 18.3 Cilindrične funkcije kot rešitve amplitudne enačbe v cilindričnih koordinatah. (Anon)

Na robu mora biti vsaka cilindrična funkcija enaka nič. Za funkcijo J_n moramo zato izbrati takšne vrednosti k_{nm}, $m = 1, 2, 3 \ldots$, da $J_n(k_{nm}a) = 0$. Funkcija J_0, na primer, ima prvo ničlo pri 2,4, zato mora biti $k_{01} = 2{,}4/a$. Iskana stojna valovanja na krožni opni so torej

$$A_{nm} = J_n(k_{nm}\rho)\cos n\varphi\,. \tag{18.42}$$

Seveda je rešitev tudi katerakoli njihova linearna kombinacija. Frekvence nihanja pa so $\omega^2/c^2 = k_{nm}{}^2$.

Krogla

Stojna nihanja na površini in v notranjosti elastične krogle opišemo z amplitudno enačbo v sferičnih koordinatah [17.8]. Rešitev iščemo v obliki $A = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Pričakujemo izjemno težko delo, saj je bil že izračun za krožno opno zelo zahteven. Zato se ga ne bomo lotili. □