16 Krivulje in ploskve

Krivulje in ploskve – Premica – Krožnica – Elipsa – Parabola – Vektorski opis krivulj – Ločna dolžina – Lokalne lastnosti krivulj – Osnovne ploskve – Vektorski opis ploskev – Krivulje na ploskvi – Lokalne lastnosti ploskev – Zemljemerstvo na krogli – Zemljepisne projekcije – Polarna stereografska – Ekvatorska valjna konformna – Stožčna konformna – Druge projekcije

16.1 Krivulje in ploskve

Večkrat smo omenili, da enačba $y = y(x)$ opisuje ravninsko *krivuljo*, če sta spremenljivki x in y dolžinski koordinati. Enačba $z = z(x, y)$ pa na podoben način opisuje *ploskev* v prostoru. Čas je, da se opisa krivulj in ploskev lotimo sistematično (DESCARTES, GAUSS).

Koordinate

Osnova za opis krivulj in ploskev z enačbami je "poimenovanje" vsake prostorske točke z njenimi koordinatami (x, y, z) v poljubno izbranem koordinatnem sistemu, katerega osi so med seboj pravokotne in umerjene v enakih dolžinskih enotah. Rečemo, da so to *kartezične koordinate*. Razdalja med dvema točkama potem znaša, po hipotenuznem izreku,

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 . \qquad (16.1)$$

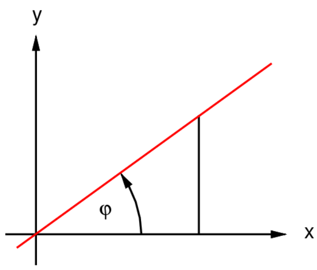
Pametno je sistem izbrati tako, da bo enačba krivulje ali ploskve v njem čim bolj preprosta.

16.2 Premica

Enačba premice

Najpreprostejša "krivulja" je *premica*. Uteleša jo, na primer, brazda ladje, ki pluje po morju v stalni smeri φ glede na sever. Pot ne sme biti predolga, da se ne pokaže zakrivljenost morja. Koordinatni sistem postavimo v začetno pristanišče, ordinatno os y usmerimo proti severu in abscisno os x proti vzhodu. Enačba brazde-premice se potem glasi

$$y = kx \qquad (16.2)$$
$$k = \tan\varphi.$$



Slika 16.1 Premica. Najkrajša pot med dvema točkama v prostoru.

Smerni koeficient k ima nazoren pomen: to je prirast ordinatne razdalje na prirast abscisne razdalje. Če je koeficient pozitiven, premica narašča, sicer upada.

Premico, ki ne gre skozi izhodišče, ampak seka ordinatno os v y_0, opišemo kot $(y - y_0) = kx$. Če seka abscisno os v točki x_0, velja $y = k(x - x_0)$. Ako pa gre skozi točko (x_0, y_0), se enačba premice glasi $(y - y_0) = k(x - x_0)$.

Parametrični zapis

Pri ladji, ki pluje z enakomerno hitrostjo, sta njeni koordinati enolično določeni s pretečenim časom t:

$$\begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt\,. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Ladja zariše isto premico ne glede na to, kako hitro pluje oziroma kako hitro teče čas (to je ura, ki jo imamo). Zato bomo opustili časovne enote in uporabljali kar brezdimenzijska števila. Takšen "čas", ki zavzema vrednosti na intervalu $(-\infty, +\infty)$, bomo poimenovali *parameterski čas* oziroma *parameter* in ga označevali kar s t. Vsaki vrednosti parametra ustreza natanko ena vrednost koordinat. Primerjava parametričnega in eksplicitnega zapisa pove $k = B/A$.

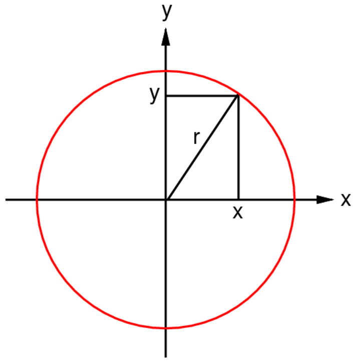
16.3 Krožnica

Enačba krožnice

Iz sive davnine je poznana *krožnica*: krivulja, katere vsaka točka je enako oddaljena od izbrane točke, središča. Že stara ljudstva so jo risala s količkom in vrvico pri gradnji kolib in obzornih krogov. Mi bomo postavili koordinatni sistem v središče kroga. Potem pove hipotenuzni izrek

$$x^2 + y^2 = r^2\,. \tag{16.4}$$

V translatorno zamaknjenem koordinatnem sistemu pa ima središče kroga koordinati (x_0, y_0). Tedaj očitno velja $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.



Slika 16.2 Krožnica. Vsaka njena točka je enako oddaljena od izbrane točke, središča.

Parametrični zapis

Tudi krožnico lahko opišemo parametrično. Spomnimo se enakomernega kroženja nihala (iz fizike), pa takoj uvidimo

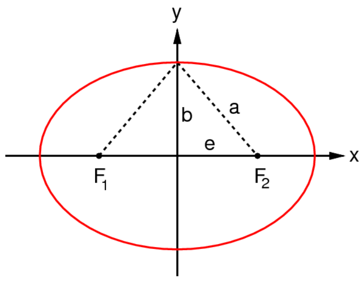
$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t\,, \end{aligned} \tag{16.5}$$

pri čemer leži parameter t na intervalu $[0,2\pi]$.

16.4 Elipsa

Prečno presekano bambusovo steblo ima rob v obliki krožnice. Če ga presekamo poševno, pa je rob "raztegnjena" krožnica, *elipsa*. Kako bi tako elipso narisali na tleh? Prej ali slej – morda kot kakšen kraljevi vrtnar – odkrijemo postopek: središče kroga "raztegnemo" v dve središči, nanju privežemo vrv, jo nategnemo z risalnim količkom in začrtamo željeno krivuljo. Elipsa je s tem definirana kot množica točk, pri katerih je vsota razdalj do dveh izbranih točk, *gorišč*, konstantna.

Točko na polovici zveznice med obema goriščema poimenujemo središče elipse. Skozi središče potekata dva odlikovana premera: dolga os $2a$ in kratka os $2b$. Razdaljo med središčem in (katerimkoli) goriščem poimenujemo *ekscentričnost* e. Ko je risalni količek v temenu velike osi, vidimo, da velja $r_1 + r_2 = 2a$. Ko je v temenu male osi, pa hipotenuzni izrek pove $b^2 + e^2 = a^2$.



Slika 16.3 Elipsa. Vsota razdalj iz dveh izbranih točk, gorišč, je do vsake njene točke enaka.

Enačba elipse

Koordinatni križ postavimo v središče elipse in ga zavrtimo tako, da njegove osi sovpadajo z veliko in malo osjo. Levo gorišče ima potem koordinato $(-e, 0)$ in desno $(+e, 0)$. Razdalji od gorišč do izbrane točke na elipsi znašata ${r_1}^2 = (x+e)^2 + y^2$ in ${r_2}^2 = (x-\mathrm{e})^2 + y^2$. Njuna vsota mora biti $r_1 + r_2 = 2a$ in iz tega pogoja sledi, z nekaj računanja, enačba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{16.6}$$

Elipso v premaknjenem koordinatnem sistemu (oziroma premaknjeno elipso v obstoječem sistemu) pa opišemo z zamenjavo $x \to x - x_0$ in $y \to y - y_0$.

Parametrični zapis

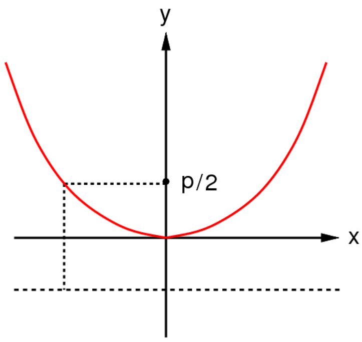
Pri $a = b$ preide elipsa v krog, kakor je tudi prav. Parametrični opis zato kar uganemo:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t\,. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Parameter t leži na intervalu $[0, 2\pi]$. Da je to res pravi opis, preverimo z vstavitvijo v implicitno enačbo.

16.5 Parabola

Krogelno zrcalo (katerega presek je krožni lok) zbira vzporeden snop žarkov v goriščno točko, vendar samo tedaj, kadar je snop ozek. Bolj oddaljeni žarki se po odboju sekajo v gorišču, ki je bliže temenu. Morda obstaja kakšna krivulja, ki bi vse vzporedne žarke združevala v isti točki? Drugače povedano: tako krivuljo – *parabolo* – bi morale sestavljati točke, ki so enako oddaljene od premice in goriščne točke.



Slika 16.4 Parabola. Vsaka njena točka je enako oddaljena od izbrane točke, gorišča, in od vodilne premice.

Enačba parabole

Postavimo koordinatni sistem tako, da bo premica "vodilja" vodoravna pri koordinati $(0, -p/2)$. Gorišče je potem v točki $(0, +p/2)$. Razdalja poljubne točke na iskani krivulji od gorišča je ${r_1}^2 = (y - p/2)^2 + x^2$ in razdalja te točke od premice je $r_2 = |y + p/2|$. Iz pogoja $r_1 = r_2$ sledi, z nekaj računanja,

$$2py = x^2 \,. \tag{16.8}$$

Parametrični zapis

Enačba ima obliko $y \propto x^2$. Spomnimo se, da prav takšna enačba opisuje tir kamna pri vodoravnem metu (v fiziki). Tam narašča vodoravna koordinata s časom in navpična s kvadratom časa, kar nas navede na naslednji parametrično zapis parabole z navpično simetrijsko osjo:

$$\begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt^2 \,. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Vstavitev polarnih enačb v implicitno enačbo pove $2p = A^2/B$.

16.6 Vektorski opis krivulj

Hodograf vektorja

Namesto s koordinatami lahko delamo z ustreznimi *vektorji lege*: $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Razdaljo med dvema točkama potem zapišemo kot absolutno vrednost razlike dveh vektorjev: $s = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$.

Parametrski zapis krivulje pove, kako se vsaka koordinata spreminja s časom: $x = x(t)$ in $y = y(t)$. To zapišemo v vektorski obliki kot

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) \,. \tag{16.10}$$

S časom se vektor spreminja – obrača, daljša in krajša – in s svojo konico zarisuje *hodograf* – krivuljo. Naraščajoči parameter t definira pozitivno smer gibanja po krivulji.

Odvodi po parametru

Kako se odvod ene koordinate po drugi izraža z odvodoma koordinat po parametru? Verižno pravilo pove $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) \cdot (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$, torej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} \,. \qquad (16.11)$$

Odvod po parametru smo označili s črtico. Drugi odvod pa računamo takole. Posredno odvajamo $(d/dx)(dy/dx) = (d/dt)(dy/dx) \cdot dt/dx$. Ker $dy/dx = y'/x'$ in $dt/dx = 1/x'$, velja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \,. \qquad (16.12)$$

Kako parametrizirati

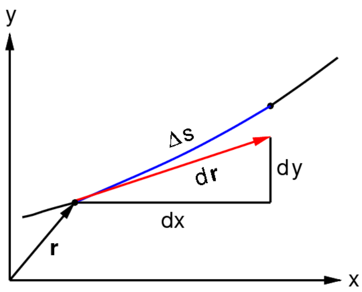
Kako za funkcijo $y = y(x)$ določiti parametrično obliko? Izberemo (skoraj) poljubno funkcijo $x = x(t)$ in nato izračunamo $y = y(x(t))$. Očitno je možnosti za izbiro neskončno. Poiščemo takšno, da je rezultat najbolj preprost. Posebno zanimiva izbira je kar $x = t$. Tedaj velja $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$. Parabolo, na primer, zapišemo kot $\boldsymbol{r}(t) = (At, Bt^2)$ ali kot $\boldsymbol{r}(x) = (x, x^2/2p)$. Očitno je parametrični zapis krivulje zelo nazoren in vsestranski.

Kako pa iz parametrične oblike $x = x(t)$, $y = y(t)$ določiti eksplicitno oziroma implicitno obliko funkcije? Iz prve in druge enačbe izrazimo t, ju izenačimo in dobimo iskano enačbo, ki jo po potrebi še preoblikujemo v lepšo obliko.

16.7 Ločna dolžina

Ločni element

Prirast parametra za dt se odraža kot sprememba vektorja $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ oziroma kot kratek kos krivulje, *ločni element* $ds^2 = dx^2 + dy^2$.



Slika 16.5 Ločni element krivulje. Njegova dolžina je limitno enaka spremembi vektorja lege.

Velja $ds = |d\boldsymbol{r}|$. Enačbo delimo na obeh straneh z dt, pa dobimo

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}'|\, dt = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}\, dt \,. \qquad (16.13)$$

Dolžina krivulje

Dolžina poti, ki jo zariše vektor med začetno in končno lego, znaša

$$s = \int \sqrt{(x'^2 + y'^2)}\, dt \,. \qquad (16.14)$$

Če je parameter koordinata $t = x$, pomeni odvajanje na parameter kar odvajanje na koordinato: $x' = dx/dx = 1$ in $y' = dy/dx$, torej $ds = \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx$.

Naravna parameterizacija

Dolžina krivulje od izbrane začetne točke naprej in nazaj je odličen parameter za opis krivulje. Krivulja je tedaj kot cesta, na kateri so v enakih dolžinskih presledkih postavljeni mejniki. Vsak tak mejnik ima svoje koordinate in krivuljo opišemo kot

$\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s))$. Parameter je sedaj vezan zgolj na krivuljo in nič na okolico. Pri takšni parametrizaciji seveda velja $x'^2 + y'^2 = 1$ (črtica označuje odvod po parametru s).

Kako dolžinsko parametrizirati krivuljo, ki je podana s splošnim parametrom t? — Izračunamo dolžino vzdolž krivulje kot funkcijo časa $s(t)$. — Izračunamo obratno funkcijo $t(s)$. — Vstavimo jo v prvotno enačbo $\boldsymbol{r}(t(s))$. Za krog, na primer, dobimo $x = r\cos(s/r)$ in $y = r\sin(s/r)$.

16.8 Lokalne lastnosti krivulj

Tangenta

Smer krivulje v izbrani točki je podana z normaliziranim premikom

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,. \tag{16.15}$$

Števec in imanovalec ulomka delimo z dt in dobimo enotni *tangentni vektor* $\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|$, to je

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}\,. \tag{16.16}$$

Tangenta, na kateri leži enotni tangentni vektor, ima smerni koeficient $k = y'/x'$. Če se dve krivulji sekata, je kot med njunima tangentnima vektorja določen s skalarnim produktom $\boldsymbol{\tau}_1 . \boldsymbol{\tau}_2 = \cos\varphi$.

Normala

S tangentnim vektorjem je definiran *normalni vektor*, ki stoji nanj pravokotno:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\tau}\,, \tag{16.17}$$

pri čemer je $\boldsymbol{k}$ enotni vektor v smeri osi z. Normalni vektor dobimo s križnim množenjem vektorskega produkta (ali z množenjem z rotacijsko matriko za 90°):

$$\boldsymbol{n} = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}\,. \tag{16.18}$$

Normala, na kateri leži normalni vektor, ima smerni koeficient $k = -x'/y'$. To je negativna recipročna vrednost smernega koeficienta tangente.

Ukrivljenost

Koliko se zasuče enotni vektor preko dolžinskega elementa, je mera za lokalno *ukrivljenost* krivulje

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|. \tag{16.19}$$

Izračunamo jo takole. — Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ odvajamo po času posredno: $\boldsymbol{r}' = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s)\cdot(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$ in dobimo $\boldsymbol{\tau}v$. — Vektor $\boldsymbol{r}'$ odvajamo po času posredno: $\boldsymbol{r}'' = (\mathrm{d}/\mathrm{d}s)(\boldsymbol{\tau}v)\cdot(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$, upoštevamo pravilo za odvod produkta in $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}s = K\boldsymbol{n}$ ter dobimo $Kv^2\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. — Izračunamo produkt $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = Kv^3 \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$. — Iz slednjega izrazimo K, pri čemer upoštevamo $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, in dobimo $K = (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')\boldsymbol{k}/v^3$, torej:

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} . \tag{16.20}$$

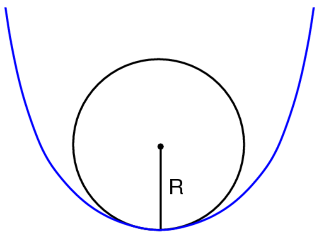
Enačbe za tangento, normalo in ukrivljenost se ustrezno poeneostavijo, če vzamemo $t = x$ ali $t = s$. Ukrivljenost se, na primer, izrazi kot $K = y'' / (1 + y'^2)^{3/2}$ oziroma kot $K = \sqrt{(x''^2 + y''^2)}$.

Krivinski radij

Ko izračunamo ukrivljenost krožnice z radijem R, dobimo v vsaki točki vrednost

$$K = \frac{1}{R} . \tag{16.21}$$

Če je ukrivljenost krivulje K, zato rečemo, da je njen lokalni *krivinski radij* $R = 1/K$. Krivulja je lokalno "nerazločljiva" od takega "pritisnjenega" kroga. Pritisnjeni krog je lokalno enak krivulji v tem smislu, da imata enak "ničti", prvi in drugi odvod.



Slika 16.6 Krivinski radij krivulje. To je radij kroga, ki se najtesneje prilega krivulji.

Invariante krivulj

Nekatere značilnosti krivulje so odvisne od njene lege v izbranem koordinatnem sistemu. Primer so nagibi tangent ali normal glede na abscisno ali ordinatno os. Pri vrtenju koordinatnega sistema se takšni nagibi ne ohranjajo. Po drugi strani pa je ukrivljenost v izbrani točki krivulje neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Rečemo, da je to invariantna lastnost krivulje oziroma njena *invarianta*. Invariante se ne izražajo s koordinatami, marveč le z njihovimi diferenciali.

16.9 Osnovne ploskve

Ravnina

Ravnina, ki gre skozi izhodišče koordinatnega sistema, zareže v ravnini xz enotni vektor $\boldsymbol{r}_1 = (\cos\theta_1, 0, \sin\theta_1)$. V ravnini yz zareže vektor $\boldsymbol{r}_2 = (0, \cos\theta_2, \sin\theta_2)$. Poljubna linearna kombinacija teh dveh vektorjev $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{r}_1 + B\boldsymbol{r}_2$ je krajevni vektor do ustrezajoče točke na preučevani ravnini. Zapišimo to kombinacijo v komponentah. Iz prve enačbe $x = A\cos\theta_1$ izrazimo A, iz druge $y = B\cos\theta_2$ izrazimo B in oboje vstavimo v tretjo enačbo $z = \mathrm{A}\sin\theta_1 + B\sin\theta_2$. Tako dobimo eksplicitno enačbo ravnine

$$z = k_1 x + k_2 y , \tag{16.22}$$

pri čemer sta k_1 in k_2 smerna koeficienta, torej tangensa obeh naklonskih kotov θ_1 in θ_2.

Valj

Vodoravno krožnico $x^2 + y^2 = r^2$ premikamo v navpični smeri. Pri tem zariše plašč *valja*. Enačba zanj je kar enaka enačbi krožnice:

$$x^2 + y^2 = r^2 \,. \tag{16.23}$$

Stožec

Premico $z = kx$ zavrtimo okrog navpične osi z. Nobeni točki se pri tem koordinata z ne spreminja, njena koordinata x pa prehaja v koordinate $\rho = \surd(x^2 + y^2)$. Enačbo $z = k\rho$ kvadriramo in dobimo enačbo *stožca*

$$\frac{z^2}{k^2} = x^2 + y^2 \,. \tag{16.24}$$

Krogla

Krožnico $x^2 + z^2 = r^2$ zavrtimo okoli navpične osi z. Transformacija $x^2 \to x^2 + y^2$ da enačbo *krogle*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \,. \tag{16.25}$$

Rotacijski elipsoid

Elipso $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ zavrtimo okrog navpične osi z. Dobimo rotacijski *elipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \,. \tag{16.26}$$

Rotacijski paraboloid

Parabolo $2pz = x^2$ zavrtimo okrog navpične osi z. Nastane rotacijski *paraboloid*

$$2pz = x^2 + y^2 \,. \tag{16.27}$$

Vse zapisane enačbe veljajo v posebno skrbno izbranih sistemih. Tako so tudi enačbe preproste. Seveda pa lahko koordinatni sistem translatorno premaknemo, kar je isto, kot da premaknemo ploskev v nasprotni smeri. Premik vzdolž osi z, na primer, je ekvivalenten transformaciji spremenljivke $z \to z - z_0$. Enačba se temu ustrezno "pogrša". Še hujše lepotne spremembe dosežemo z rotacijo.

16.10 Vektorski opis ploskev

Izbrane ploskve smo zapisali implicitno ali eksplicitno. Pojavi se vprašanje, ali (in kako) jih lahko zapišemo parametrično oziroma vektorsko. Poskusimo z najpomembnejšo ploskvijo, kroglo.

Točka na krogli radija R je enolično določena z vektorjem lege $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Komponente vektorja izrazimo, kot že znamo, z azimutnim kotom φ in s polarnim kotom θ (14.2):

$$\begin{aligned} x &= R \sin\theta \cos\varphi \\ y &= R \sin\theta \sin\varphi \\ z &= R \cos\theta \,. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Parametrska ravnina

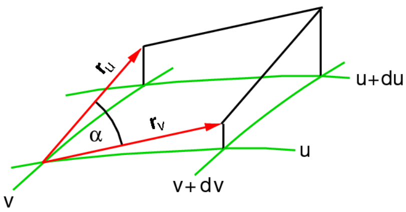
Vsaki dvojici kotov torej pripada ustrezna trojica koordinat. Na podoben način se lotimo tudi drugih ploskev. Valj in stožec, na primer, parametriziramo z azimutnim kotom in višino. Ne predivje ploskve nasploh opišemo z dvema parametroma:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \,. \tag{16.29}$$

Parametra sta lahko karkoli. V posebnem primeru izberemo kar dve koordinati: $\boldsymbol{r} = (x, y, z(x,y))$. Tedaj preide parametrični opis v eksplicitnega. Hkrati nam ponudi še naslednjo nazorno sliko: dva splošna parametra tvorita posebno "parametrično" ravnino. Točke te ravnine se preslikajo v točke na aktualni ploskvi.

16.11 Krivulje na ploskvi

Krivulja $(u(t), v(t))$ v parametrični ravnini se preslika v ustrezno krivuljo na ploskvi. Poseben primer je preslikava, ko je eden izmed parametrov konstanten, recimo $v = \text{const}$. Tedaj se na ploskvi zariše ena izmed izo-parametričnih krivulj. Pri različnih vrednostih konstante se nariše množica takih krivulj – krivočrtnih koordinat na ploskvi. Tako se na krogli, na primer, zarišejo poldnevniki $\varphi = \text{const}$ in vzporedniki $\theta = \text{const}$.



Slika 16.7 Parcialna premika na ploskvi. To sta prirastka vektorja lege vzdolž krivočrtnih koordinat na ploskvi.

Parametrski kot

Vektorja $\boldsymbol{r}_u$ in $\boldsymbol{r}_v$ ležita v lokalni tangentni ravnini vzdolž obeh krivočrtnih koordinat. Kakšen je sekalni kot teh koordinat, α, pove skalarni produkt:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u||\boldsymbol{r}_v|}\,. \tag{16.30}$$

Pri lepo izbranih parametrizacijah je kot v vsaki točki (morda s kakšno izjemo) enak 90°. Tedaj so krivočrtne koordinate med seboj pravokotne. Takšni so poldnevniki in vzporedniki na krogli.

Dolžinski element

V tangentni ravnini leži tudi totalni diferencial – "poševni" premik $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v$. S kvadratom tega premika je določena njegova dolžina $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, torej:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= {\boldsymbol{r}_u}^2 \mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \mathrm{d}u\mathrm{d}v + {\boldsymbol{r}_v}^2 \mathrm{d}v^2 = \\ &g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2\,. \end{aligned} \tag{16.31}$$

V komponentah zapišemo

$$\begin{aligned} g_{11} &= {x_u}^2 + {y_u}^2 + {z_u}^2 \\ g_{12} &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ g_{22} &= {x_v}^2 + {y_v}^2 + {z_v}^2\,. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Koeficienti g_{11}, g_{12} in g_{22} so realna števila. Vsaka točka na ploskvi ima svojo trojico teh števil. Rečemo, da so to *metrični koeficienti* ploskve. Njihov pomen je, da diferenciale parametrov "povežejo" z diferenciali dolžin. Če izberemo drugačno parametrizacijo ploskve, se metrični koeficienti seveda spremenijo. V pravokotni koordinatni mreži je koeficient $g_{12} = 0$. Za kroglo v standardni parametrizaciji izračunamo $g_{11} = r^2 \sin^2 \theta$ in $g_{22} = r^2$. Za valj pa $g_{11} = 1$ in $g_{22} = r^2$.

Dolžina krivulje na ploskvi je limitna vsota vseh dolžinskih diferencialov, torej (če označimo odvod po času s črtico)

$$s = \int \sqrt{(g_{11}u'^2 + 2g_{12}u'v' + g_{22}v'^2)}\mathrm{d}t\,. \tag{16.33}$$

Geodetke

Med dvema oddaljenim točkama A in B na ploskvi poteka neskončno mnogo krivulj. Ena od njih je najkrajša. Rečemo, da je to *geodetka*. Na krogli je geodetka glavni krog, to je tak, ki ima središče v središču Zemlje. Nazorno si geodetko predstavljamo kot elastično nit, napeto med obema točkama: elastičnost jo skrči na najkrajšo dolžino.

Ploščinski element

Dolžinska elementa vzdolž krivočrtnih koordinat, pravokotnih ali ne, sta $(\mathrm{d}s)_u = \sqrt{g_{11}}\mathrm{d}u$ in $(\mathrm{d}s)_v = \sqrt{g_{22}}\mathrm{d}v$. Ploščina paralelograma, ki ga zamejujeta, pa znaša

$$\mathrm{d}S = (\mathrm{d}s)_u\,(\mathrm{d}s)_v \sin\alpha = \sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,. \tag{16.34}$$

Ploščina ploskve je limitna vsota ploščinskih elementov, torej dvojni integral

$$S = \int\!\!\int \sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,. \tag{16.35}$$

Za parametra, ki sta kar koordinati, se enačba poenostvi v obliko

$$S = \int\!\!\int \sqrt{(1 + z_x{}^2 + z_y{}^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{16.36}$$

16.12 Lokalne lastnosti ploskev

Normala

Tangentna vektorja ležita v tangentni ravnini. Njun vektorski produkt je pravokoten nanjo. Če ga normiramo, dobimo *normalo*

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)}}\,. \tag{16.37}$$

Za parametra, ki sta kar koordinati, se enačba zapiše v obliki

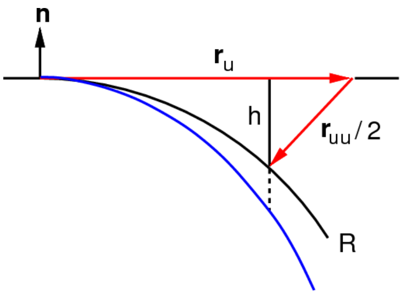
$$\boldsymbol{n} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{(1 + z_x{}^2 + z_y{}^2)}}\,. \tag{16.38}$$

Odmik tangentne ravnine

Vektor iz opazovane točke v bližnjo okolišnjo točko na ploskvi, torej vektor $\boldsymbol{r}(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v) - \boldsymbol{r}(u,v)$, aproksimiramo s potenčno vrsto z linearnim členom $(\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)$ in s kvadratnim členom $^1/_2 \cdot (\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{r}_{vv}\mathrm{d}v^2)$. Prvi člen je pomik po tangentni ravnini. Drugi člen je pomik do pritisnjenega kroga v smeri pravokotno na krog. Če ga pomnožimo z normalo, dobimo pravokotno razdaljo od tangentne ravnine:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}h &= L_{11}\mathrm{d}u^2 + 2L_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + L_{22}\mathrm{d}v^2 \\ L_{11} &= \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} \\ L_{12} &= \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} \\ L_{22} &= \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}\,. \end{aligned} \tag{16.39}$$

Za kroglo v standardni parametrizaciji izračunamo $L_{11} = r \sin^2 \theta$ in $L_{22} = r$. Za valj pa velja $L_{11} = 0$ in $L_{22} = r$.



Slika 16.8 Odmik ploskve od tangentne ravnine. Limitno je enak odmiku pritisnjene paraboloidne ploskve.

Ukrivljenost

Ukrivljenost ploskve je enaka ukrivljenosti pritisnjenega kroga: $\mathrm{d}h = \mathrm{d}s^2/2R$, torej $1/R = 2\mathrm{d}h/\mathrm{d}s^2$, zato:

$$K = \frac{L_{11}\mathrm{d}u^2 + 2L_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + L_{22}\mathrm{d}v^2}{g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2} \,. \tag{16.40}$$

To je ukrivljenost ploskve v smeri, ki jo določata du in dv. Skozi izbrano točko potekajoče krivulje imajo večjo ali manjšo ukrivljenost. Izmed njih ima ena maksimalno ukrivljenost $K_{\mathrm{max}} = 1/\mathrm{R}_{\mathrm{min}}$ in druga minimalno $K_{\mathrm{min}} = 1/R_{\mathrm{max}}$. Najdemo ju kot ekstremalne vrednosti po vseh smereh. V to se ne bomo spuščali. Ko takšni vrednosti najdemo, se lahko igramo z njunima vrednostima: tvorimo, na primer, "povprečno" ukrivljenost $K = (K_{\mathrm{max}} + K_{\mathrm{min}})/2$ ali "metrično" ukrivljenost $K = K_{\mathrm{max}} \cdot K_{\mathrm{min}}$ ter poskušamo najti, kako se izražata s koeficienti $g_{11} \ldots L_{22}$. Tudi to zahtevno zabavo prepustimo drugim, ki jih to zanima.

Poglejmo še nekaj zgledov. Ravnina ima v vsaki točki vse ukrivljenosti nič. Zato ji tudi rečemo ravnina. Na krogli so poldnevniški krivinski radiji večji od vzporedniških. Vsi glavni krogi skozi vsako točko pa imajo enak radij, ki je enak poldnevniškemu. Najmanjši krivinski radij na valju je enak polmeru valja in največji je neskončen. Podobno je pri stožcu. Vidimo, da se da marsikaj dognati tudi brez računanja.

16.13 Zemljemerstvo na krogli

Na majhnih razdaljah je zemeljska površina ravna in koti, premice in trikotniki na njej se pokoravajo že spoznanim pravilom, recimo pravilu o vsoti notranjih kotov v trikotniku ali hipotenuznemu pravilu o razdalji med dvema točkama. Na večjih razdaljah pa je treba upoštevati zemljino zakrivljenost. "Ravne" premice na njej postanejo glavni krogi. Vsota notranjih kotov trikotnika postane večja od 180°, kar se lepo vidi na primeru trikotnika z bazo na ekvatorju in vrhom na polu. Hipotenuzni, kosinusni in sinusni izrek za trikotnike pa bo treba na novo premisliti.

Dolžina geodetke

Za lažje preučevanje bomo vse dolžine na krogli merili z radijem kot enoto. S tem postane radij brezdimenzijska količina z velikostjo 1, dolžinski odsek vsakega glavnega kroga pa številsko enak središčnemu kotu, v radianih, na katerega je napet. Prvo vprašanje, ki si ga zastavimo, je: kolikšna je dolžina glavnega kroga med dvema točkama?

Na točki naj kažeta vektorja $\boldsymbol{r}_1(\theta_1, \varphi_1)$ in $\boldsymbol{r}_2(\theta_2, \varphi_2)$ iz središča krogle. Njuna velikost je enaka ena. Kot med njima, torej brezdimenzijska dolžina glavnega kroga, je določen s skalarnim produktom $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \cos\alpha$. Zmnožimo komponente, upoštevamo kosinus razlike in dobimo

$$\cos\alpha = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\theta_1 \cos\theta_2\,. \tag{16.41}$$

Razdalja, v dolžinskih enotah, je potem $d = R\,\alpha$. Poseben primer $\varphi_1 = \varphi_2$ pove dolžino poldnevnika: $\alpha = |\theta_2 - \theta_1|$, kakor tudi mora biti.

Hipotenuzni izrek

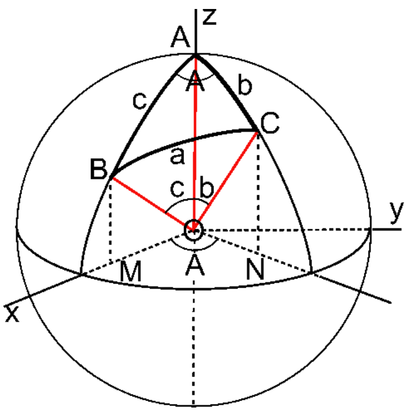
Pravokotni trikotnik na krogli določajo trije enotni vektorji iz njenega izhodišča do trikotnikovih oglišč. Vseeno je, kako je koordinatni sistem postavljen. Izberemo ga tako, da kaže vektor $\boldsymbol{r}_1$ vzdolž osi x, vektor $\boldsymbol{r}_2$ leži v ekvatorski ravnini xy pod dolžinskim kotom a in vektor $\boldsymbol{r}_3$ leži v poldnevniški ravnini pod širinskim kotom h. Vektorji so torej naslednji: $\boldsymbol{r}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (\cos a, \sin a, 0)$ in $\boldsymbol{r}_3 = (\cos a \cos h, \sin a \sin h, \sin h)$. Kot d med $\boldsymbol{r}_1$ in $\boldsymbol{r}_3$ je hipotenuza trikotnika in je določen s skalarnim produktom $\cos d = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2$. Pomnožimo komponente in dobimo *hipotenuzni izrek*

$$\cos d = \cos a \cos h. \tag{16.42}$$

Pri kratkih stranicah aproksimiramo $\cos x \approx 1 - x^2/2$, zanemarimo visoke potence in izrek preide v ravninskega.

Kosinusni izrek

Podobno se lotimo poševnega trikotnika na krogli. Omejimo se na "prave" trikotnike, katerih koti so manjši od π in katerih stranice so tudi manjše od π.



Slika 16.9 Poševni trikotnik na krogli. (Mercator, 2013)

Na tri oglišča trikotnika kažejo vektorji OA, OB in OC. Koordinatni sistem usmerimo, kot kaže slika. V njem velja $\mathrm{OA} = (0, 0, 1)$ in $\mathrm{OB} = (\sin c, 0, \cos c)$. Vektor OC se projicira v ON pod kotom A, torej $\mathrm{OC} = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$. Skalarni produkt $\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OC} = \cos a$. Zmnožimo komponente in dobimo:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \, . \tag{16.43}$$

Stranica a je podana z drugima dvema stranicama in kotom med njima. To je iskani *kosinusni izrek*. Velja seveda za vsakršno permutacijo zapisanih količin. Opazimo tudi, da je kosinusni izrek povsem enak izrazu za dolžino geodetke (16.41). To pa ni nič čudnega, saj je slednji le poseben primer prvega: za glavne kroge uporablja poldnevnike in ekvator.

Pri majhnih razdaljah aproksimiramo $\sin x \approx x$ in $\cos x \approx 1 - x^2/2$, zanemarimo visoke potence in izrek preide v ravninskega. V posebnem primeru, ko $A = 90°$, je trikotnik pravokoten in izrek se reducira v hipotenuzni izrek.

Sinusni izrek

Ideniteta $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ nas navede na misel, da vanjo vstavimo $\cos A$ iz kosinusnega izreka in upamo, da se bo izcimil sinusni izrek. Res pridelamo izraz $\sin A / \sin a = f(a, b, c)$. Desna stran izraza je invariantna glede na ciklično permutacijo stranic, kar pomeni, da mora veljati

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \, . \tag{16.44}$$

To je *sinusni izrek*. Pri majhnih razdaljah preide v že znano ravninsko obliko.

Hipotenuzni, kosinusni in sinusni izrek nam pomagajo pri računanju kotov in stranic na krogli točno na tak način, kot to počnemo v ravnini. Ko delamo s kroglo polmera R namesto 1, moramo vse stranice trikotnika, podane v dolžinskih enotah, deliti z R. Drugače rečeno: namesto brezdimenzijske stranice a moramo povsod pisati a/R in podobno za druge stranice.

16.14 Zemljepisne projekcije

Projekcija krogle

Točke na zemeljski površini so enolično določene s svojimi zemljepisnimi koordinatami: širino δ (oziroma polarnim kotom $\theta = \pi/2 - \delta$) in dolžino φ. Zemljo verodostojno predstavimo s pomanjšanim krogelnim modelom. Takšen *globus* pa je, žal, neprimeren za prenašanje in tudi ni dovolj velik za podroben prikaz manjših območij. Naravno je torej pomisliti, kako bi ga preslikali – v celoti ali deloma – na ravno ploskev, *zemljevid*. Iščemo torej primerne preslikave

$$(x, y) \leftarrow (\theta, \varphi). \tag{16.45}$$

Rečemo jim *zemljepisne projekcije*.

Slika 16.10 Preslikava krogle na ravnino s svetlobnimi žarki. Oblika sence je zanimiva tudi za slikarje. (Rubens, 1613)

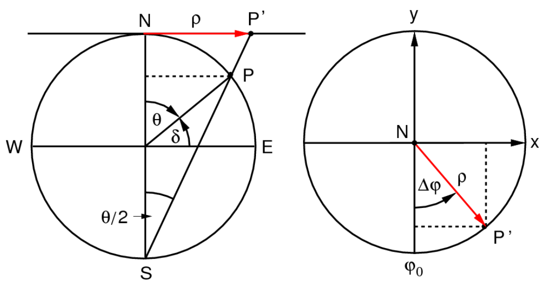
Napake projekcij

Vsaka preslikava, ki jo vpeljemo, preslika Zemljine poldnevnike in vzporednike v dve družini ravninskih krivulj. Dva bližnja vzporednika in poldnevnika na Zemlji oblikujeta ploščinski element, približni pravokotnik. Ko se takšen pravokotnik preslika, pričakujemo naslednje nevšečnosti: kot med stičnima stranicama se spremeni; razmerje med tema stranicama se spremeni; enaki pravokotniki na različnih lokacijah se preslikajo neenako, bodisi po dolžini, širini ali ploščini. Seveda hočemo najti take preslikave, ki bodo obremenjene s čim manj nevšečnostmi. Posebej pomembno je, da se ohranjajo lokalni koti, to je lokalna razmerja stranic. Tedaj se oblika in orientacija drobnih likov pri preslikavi ohranja. Drobni krogi se, na primer, preslikajo kot krogi. Takim preslikavam rečemo *konformne*.

16.15 Polarna stereografska

Preslikava z žarki

Preslikajmo severno poloblo na tangentno ravnino na severnem polu! Preslikujemo lahko z žarki, ki izhajajo is središča krogle, iz njenega južnega pola ali iz južne neskončnosti. V vsakem primeru se Zemljini poldnevniki preslikajo v radialne premice, vzporedniki pa v koncentrične kroge. Razdalja med krogi je odvisna od izbire žarkov. Središčni žarki "preveč" raztegnejo ekvatorske predele, neskončni pa jih "preveč" stisnejo. Osredotočimo se torej na južni pol kot izvor žarkov. To je *polarna stereografska projekcija*.



Slika 16.11 Polarna stereografska projekcija. Projekcija je primerna za prikaz polarnih dežel, pa tudi za prikaz zvezdnega neba.

Polarni izvor žarkov

Slika pokaže, da se točka P(θ) preslika v točko P'(ρ). Ker je obodni kot enak polovici središčnega, razberemo iz pravokotnega trikotnika SNP' povezavo

$$\rho = 2R \tan \frac{\theta}{2} \,. \tag{16.46}$$

Za radij Zemlje izberemo primerno pomanjšano vrednost: $R = M \cdot R_\mathrm{E}$, na primer $M = 1{:}10^7$. Namesto polarnega kota θ lahko uporabimo tudi zemljepisni kot $\delta = 90° - \theta$. V tangentni ravnini vpeljemo koordinatni sistem z izhodiščem v polu; os y kaže vzdolž poljubnega poldnevnika φ_0. Potem velja

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \sin(\varphi - \varphi_0) \\
y &= -\rho \cos(\varphi - \varphi_0)\,.
\end{aligned}
\tag{16.47}
$$

S tem je preslikava zaključena. Seveda ni treba projicirati celotne hemisfere, ampak le kakšen njen del. Tedaj na tangentni ravnini vpeljemo lokalni koordinatni sistem, ki je glede na polarnega ustrezno translatorno zamaknjen.

Konformnost

Je projekcija morda konformna? Ploščinski element na krogli je približno pravokotnik z vzporedniško stranico $R \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$ in s poldnevniško stranico $R\, \mathrm{d}\theta$. Ustrezajoči ploščinski element v tangentni ravnini je tudi približno pravokotnik s stranicama $\rho \mathrm{d}\varphi$ in $\mathrm{d}\rho$. Z razmerjem istoležnih stranic sta podana *raztezna faktorja* $H = \rho \mathrm{d}\varphi / R \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$ in $K = \mathrm{d}\rho / R\, \mathrm{d}\theta$. Če je preslikava konformna, mora veljati $H = K$. Izračunamo odvod $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\theta$ in ga vstavimo v enačbo. Pokaže se, da je kvocient razteznih faktorjev enak 1. Preslikava je povsod konformna.

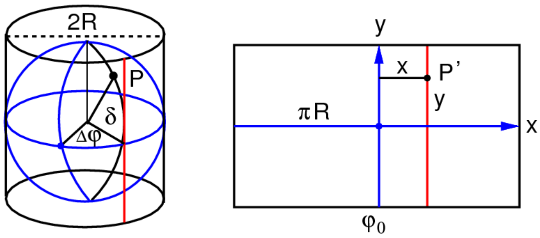
Polarna stereografska projekcija je primerna za prikaz dežel v visokih zemljepisnih širinah, pa tudi za prikaz zvezdnega neba.

16.16 Ekvatorska valjna konformna

Morska navigacija

Ko mora ladja pluti iz kraja A v oddaljeni kraj B, ima na voljo neomejeno mnogo poti. Če odmislimo tokove, vetrove in neurja, je najboljša pot tista, ki je najkrajša, torej geodetka, to je glavni krog na krogli. Takšna geodetka je na polarni stereografski projekciji v splošnem krivulja, ki seka poldnevnike pod različnimi koti. Določiti in zarisati jo brez obsežnega računanja ni možno. Pa tudi sledenje taki črti bi zahtevalo, da krmar stalno spreminja magnetni kurz ladje.

Druga možnost je krivulja, ki seka vse poldnevnike pod istim kotom – *loksodroma*. Je sicer daljša od geodetke, vendar je za krmarjenje mnogo bolj primerna. Seveda je tudi loksodroma kriva črta na polarni stereografski projekciji (razen če pluje ladja po poldnevniku). Kaj ne bi bilo čudovito, če bi imel navigator na mizi zemljepisno projekcijo, na kateri bi bila loksodroma povsod ravna črta? Med krajema A in B bi potegnil ravno črto in s tem določil kurz ladje. Bolj preprosto ne gre. Poizkusimo, kot navigatorji, najti tako projekcijo!



Slika 16.12 Ekvatorska valjna konformna projekcija. Projekcija je primerna za prikaz ekvatorskih dežel in za pomorsko navigacijo.

Valjna projekcija

Da bo loksodroma ravna, morajo očitno biti poldnevniki ekvidistantne premice, vzporedniki pa nanje pravokotne premice v takšnih medsebojnih razmakih, da je mreža povsod lokalno konformna. To pomeni, da moramo projicirati kroglo na valj, ovit okoli njenega ekvatorja. Valj se seveda da razviti v ravnino. Na valju postavimo koordinatni sistem z osjo x vzdolž ekvatorja in y vzdolž poljubnega poldnevnika φ_0. Točke s poldnevnika φ se vse preslikajo v

$$x = R\,(\varphi - \varphi_0)\,. \tag{16.48}$$

Vpeljava konformnosti

Pri tem se točke iz različnih širin θ preslikajo v ustrezne y, kakor določa zahteva po konformnosti. Ravnamo tako kot pri polarni stereografski projekciji. Izenačimo raztezna faktorja $H = \mathrm{d}x/R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$ in $K = \mathrm{d}y/R\,\mathrm{d}\theta$. V dobljeni enačbi sta vsebovana dva odvoda. Prvega $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi$ zlahka izračunamo in s tem je določen drugi: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta = R/\cos\theta$. Ločitev spremenljivk in integracija pove

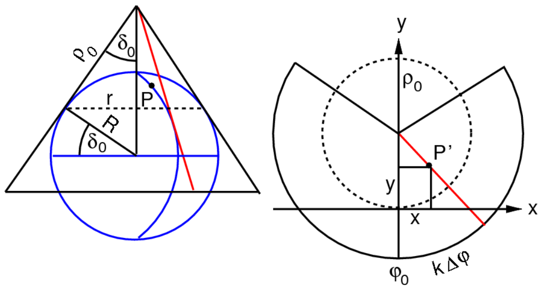
$$y = R\ln\tan\frac{\theta}{2}\,. \tag{16.49}$$

Razmiki med vzporedniki torej naraščajo z oddaljenostjo od ekvatorja. To je tudi pričakovati, saj projekcija na silo širi in paralelizira krogelne poldnevnike. Seveda ni treba projicirati celotne krogle, ampak le kakšen njen del. Tam postavimo lokalni koordinatni sistem, ki je ustrezno translatorno premaknjen.

Ekvatorska valjna konformna projekcija je odlična za pomorsko navigacijo in primerna za prikaz dežel v nizkih zemljepisnih širinah.

16.17 Stožčna konformna

Razrast industrializacije, širjenje železniškega in cestnega omrežja ter nenehna vojskovanja zahtevajo natančne zemljevide velikih držav. Pokaže se potreba po ustrezni projekciji za srednje zemljepisne širine. Smer raziskave je hitro pri roki: zemeljsko kroglo je treba projicirati na plašč stožca, ki se je dotika v izbranem vzporedniku. Poldnevniki so tedaj radialne premice, vzporednike – koncentrične kroge – pa želimo razmestiti tako, da bo projekcija konformna. Tako kot valj lahko tudi stožec nato razvijemo v ravnino.



Slika 16.13 Stožčna konformna projekcija. Projekcija je primerna za prikaz dežel v zmernem pasu.

Razvoj stožca v ravnino

Naj se stožec dotika vzporednika $\delta_0 = \pi/2 - \theta_0$, ki je za ρ_0 oddaljen od vrha stožca. Vrhnji polkot stožca je potem tudi enak δ_0. Obseg stožca po tem vzporedniku znaša $L_1 = 2\pi\rho_0 \sin\delta_0$. Ko plašč stožca razvijemo v ravnino, nastane izsekan krog, katerega celotni obseg je $L_2 = 2\pi\rho_0$. Razmerje teh dveh obsegov $L_1/L_2 = k = \sin\delta_0$. (Spomnimo se na stožčaste šotore, tipije, prerijskih severnoameriških domorodcev! Plašč tipija je točno polovica kroga: $k = 1/2$. To pomeni, da ima vrhnji polkot $\delta_0 = 30°$.)

V izsekani krog vpeljimo ravninski koordinatni sistem z vrhom v presečišču tangentnega vzporednika in poljubnega poldnevnika φ_0. Os x je usmerjena vzdolž vzporednika in os y vzdolž poldnevnika. Krogelni poldnevnik φ postane na razvitem plašču stolpca poldnevnik $k\varphi$.

Vpeljava konformnosti

Ploskovni element na razvitem plašču stožca ima vzporedniško stranico $\rho\, k\mathrm{d}\varphi$ in poldnevniško stranico $\mathrm{d}\rho$, s čimer sta določena raztezna faktorja glede na ploskovni element na krogli. Izenačitev razteznih faktorjev vodi do enačbe $\mathrm{d}\rho/\rho = k\mathrm{d}\theta/\sin\theta$. Integriranje obeh strani da rešitev

$$\rho = C\tan^k\frac{\theta}{2} \qquad (16.50)$$
$$k = \sin(\pi/2 - \theta_0).$$

Konstanto C določimo iz razteznega pogoja: $\rho(\theta_0) = R\tan\theta_0$. S tem sta določeni tudi koordinati

$$x = \rho\cos k(\varphi - \varphi_0) \qquad (16.51)$$
$$y = \rho_0 - \rho\sin k(\varphi - \varphi_0)\,.$$

Vzdolž tangentnega vzporednika so razdalje točne. Če za tangentni vzporednik izberemo pol, preide stožec v tangentno ravnino in projekcija v polarno stereografsko. Če za tangentni vzporednik izberemo ekvator, pa preide stožec v valj in projekcija v ekvatorsko valjno konformno.

Stožčna konformna projekcija je dobra za prikaz dežel na srednjih zemljepisnih širinah.

16.18 Druge projekcije

Različice projekcij

Vsaka izmed obravnavanih tipov projekcij – ravninska, valjna in stožčna – ima več različic. Če, na primer, razvrstimo vzporednike na enake medsebojne razdalje, dobimo *ekvidistantne* projekcije. Razdalje vzdolž poldnevnikov so tedaj pravilne. Spet drugače izbrana razvrstitev poldnevnikov pa zagotovi, da so pravilne ploščine. To so *ekvivalentne* projekcije. Jasno je, da spremenjene projekcije niso več konformne.

Zemlja kot rotacijski elipsoid

Zemlja je krogla le v prvem, čeravno zelo dobrem približku. Tisti, ki želijo večjo natančnost, jo aproksimirajo z rotacijskim elipsoidom s kratko polosjo med poloma. Projekcijske enačbe se močno zapletejo in vprašanje je, kdaj jih je sploh smiselno uporabljati. Sploščenost Zemlje je namreč zelo majhna: $(a-b)/a \approx 1/300$.

Globalne projekcije

Nobena izmed naštetih projekcij ni primerna za prikaz celotne zemeljske oble. Obliko velikih in "oddaljenih" kontinentov namreč močno popačijo. So pa ljudje iznašli mnogo kar sprejemljivih globalnih projekcij. Žal to, da je teh projekcij mnogo, pove, da nobena ni povsem zadovoljujoča. Ena izmed boljših je *eliptična projekcija* z naslednjimi značilnostmi. Slika sveta je elipsa z razmerjem polosi 1:2. Ekvator in vzporedniki so vzporedne daljice z enakomernim presledkom. Centralni poldnevnik je daljica. Vsi drugi so polelipse, simetrične glede na ekvator in na centralni poldnevnik. Polelipsi skozi ±90° tvorita krog. Projekcijski obrazci so ustrezno zamotani in jih ne bomo izpeljevali. □