15 Večkratne funkcije

Vektorske funkcije skalarja – Vektorski diferencial in integral – Skalarne funkcije več spremenljivk – Parcialni odvodi – Totalni diferencial – Verižno odvajanje – Razvoj v potenčno vrsto – Maksimum in minimum – Vezani ekstremi – Ploščinski integrali – Prostorninski integrali – Večkratni integrali

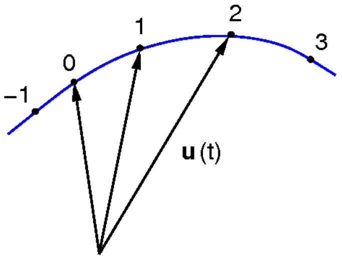
15.1 Vektorske funkcije skalarja

Vektorji so stalni ali se s časom spreminjajo. Takšen je, na primer, vektor iz središča Zemlje do izbrane točke na njenem površju: vrti se glede na zvezde. V koordinatnem sistemu, ki ima os z usmerjeno vzdolž zemeljske vrtilne osi in os x usmerjeno proti točki Gama na nebesnem ekvatorju, velja $\boldsymbol{r} = (R\sin\theta\cos\omega t, R\sin\theta\sin\omega t, R\sin\theta)$. S tem smo dobili prototip za splošno vektorsko funkcijo skalarnega argumenta:

$$\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]\,. \tag{15.1}$$

Hodograf vektorja

Vektorsko funkcijo si nazorno predstavimo kot krivuljo, ki jo zariše konica vektorja, ko se s "časom" obrača in razteguje oziroma krči. Seveda morajo biti na krivuljo nanesene ustrezne časovne oznake. Tako sliko imenujemo *hodograf* vektorja.



Slika 15.1 Hodograf vektorja.

Pojavi se vprašanje, ali lahko vektorsko funkcijo odvajamo in integriramo, oziroma kakšen pomen, če sploh, imata ti dve operaciji za vektorje.

15.2 Vektorski diferencial in integral

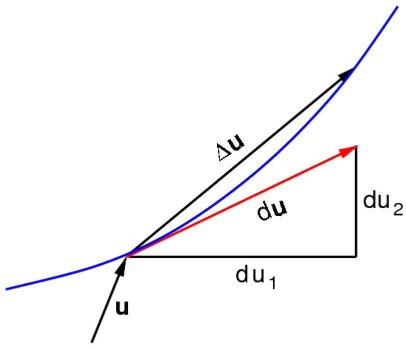
Odvod in diferencial

Odvod in diferencial definiramo po vzoru skalarnih funkcij kot

$$\boldsymbol{u}' = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{15.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' \cdot \mathrm{d}t\,.$$

Diferencial d$\boldsymbol{u}$ je tangentni prirastek na hodografu vektorja. Pri majhni spremembi argumenta je približno enak pravi spremembi vektorja. Tako definiran odvod je tudi vektorska funkcija in jo lahko nadalje odvajamo. Drugi odvod označimo $\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t^2 = \boldsymbol{u}''$.



Slika 15.2 Sprememba in diferencial (tangentna sprememba) vektorja.

Iz definicij trivialno sledijo zapisi v komponentah:

$$\boldsymbol{u}' = (u_1', u_2', u_3') \qquad (15.3)$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2, \mathrm{d}u_3)\,.$$

Za vektorske funkcije veljajo ista pravila odvajanja kot za skalarno funkcijo. Tako odvajamo vsoto, vse vrste produktov (s skalarno konstanto, s skalarno funkcijo, skalarni produkt in vektorski produkt) ter posredno skalarno funkcijo.

Razvoj v potenčno vrsto

Razvoj v potenčno vrsto izvedemo tako kot pri skalarni funkciji. Velja:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(0) + \frac{\boldsymbol{u}'(0)}{1!}\,t + \frac{\boldsymbol{u}''(0)}{2!}\,t^2 + \ldots \qquad (15.4)$$

oziroma

$$\boldsymbol{u}(t_0 + h) = \boldsymbol{u}(t_0) + \frac{\boldsymbol{u}'(t_0)}{1!}\,h + \frac{\boldsymbol{u}''(t_0)}{2!}\,h^2 + \ldots \qquad (15.5)$$

Oba razvoja seveda lahko zapišemo tudi v koordinatah. Vsaka vektorska enačba pri tem razpade na tri skalarne enačbe.

Integral

Celotna sprememba vektorja je enaka limitni vsoti njegovih diferencialnih sprememb; vektor iz konice začetnega vektorja v konico končnega vektorja znaša

$$\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}t = \left(\int u_1'\,\mathrm{d}t, \int u_2'\,\mathrm{d}t\,, \int u_3'\,\mathrm{d}t\right). \qquad (15.6)$$

Če je končni vektor enak začetnemu, je očitno integral enak nič. Ker so pravila odvajanja "standardna", so takšna tudi pravila za integriranje.

15.3 Skalarne funkcije več spremenljivk

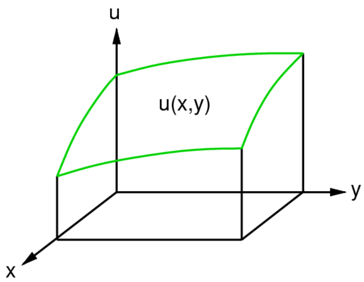
Skalarne funkcije so lahko odvisne od več spremenljivk, ne le od ene. Zgled je recimo prostornina valja, ki je odvisna od njegovega radija in višine: $V = \pi r^2 h$. Ali pa prostornina zraka v valju z batom, ki je pod pritiskom in potopljen v toplotno kopel: $V = RT/p$. In, seveda, najbolj nazorna odvisnost od vseh: višina kakšne ploskve nad ravnino, na primer polkrožne kupole nad tlemi: $h^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$.

Ploskovni graf

Vse tovrstne funkcijo dveh argumentov zapišemo v skupni obliki $u = f(x, y)$ ali kar

$$u = u(x, y)\,. \tag{15.7}$$

Njihov graf si lahko nazorno predstavljamo kot ploskev nad ravnino. Funkcije treh in več spremenljivk zapišemo podobno, ne moremo pa si jih več predstavljati kot ploskve.



Slika 15.3 Ploskovni graf.

15.4 Parcialni odvodi

Delne spremembe

Poglejmo funkcijo u v izbrani točki (x, y)! Tam ima funkcija neko vrednost, namreč $u = u(x, y)$. Če se sedaj premaknemo v kakšno sosednjo točko, se vrednost funkcije spremeni. Posebej sta odlikovana dva premika: pri prvem se premaknemo v točko $(x + \mathrm{d}x, y)$ in pri drugem v točko $(x, y + \mathrm{d}y)$. Kakšna je sprememba funkcije pri prvem "vzdolžnem" premiku, povemo s *parcialnim odvodom*

$$u_x = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{u(x + \mathrm{d}x, y) - u(x, y)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{15.8}$$

Ravnamo torej natanko tako, kot pri funkciji enega samega argumenta, ko smo definirali njen navadni odvod. Za razliko od prej pa ne označimo odvoda kot u', marveč kot u_x. Ker ima funkcija dva argumenta, je pač treba nekako povedati, za katerega velja odvajanje. Ustrezni odvod po drugem argumentu pa zapišemo kot u_y.

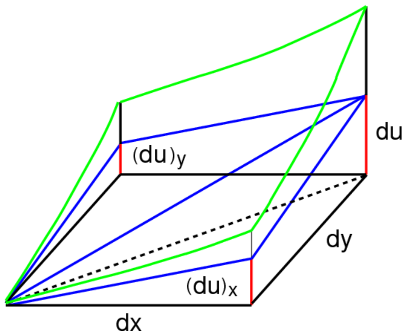
Računanje odvodov

Parcialne odvode izračunavamo prav tako kot navadne. Saj je funkcija več spremenljivk, ki jo odvajamo po eni sami spremenljivki, pri čemer držimo vse druge konstantne, v tem pogledu nerazločljiva od funkcije ene same spremenljivke. Veljajo vsa pravila odvajanja. Izračunani odvod je spet funkcija in jo lahko znova odvajamo, bodisi po prvem, bodisi po drugem argumentu. Tako pridelamo odvode u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} in u_{yx}. Zadnja dva sta med seboj enaka.

15.5 Totalni diferencial

Celotne spremembe

Parcialni odvodi povedo, koliko se funkcija spremeni, če spremenimo kakega od njenih argumentov, pri čemer druge držimo konstantne. Koliko pa se funkcija spremeni, če spremenimo vse argumente?



Slika 15.4 Totalni diferencial funkcije. Višinski prirastek tangentne ravnine je enak vsoti robnih prirastkov. Funkcija je zelena, tangentna ravnina modra in diferenciali rdeči.

Risba pokaže, da velja

$$\mathrm{d}u = (\mathrm{d}u)_x + (\mathrm{d}u)_y = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y\,. \tag{15.9}$$

Rečemo, da je du *totalni diferencial* funkcije. Z njim zapišemo parcialne odvode na naslednji način:

$$\frac{(\mathrm{d}u)_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x\,. \tag{15.10}$$

Diferencialni količniki

Oznaki ∂x in ∂y torej pomenita isto kot dx in dy, namreč diferencial neodvisne spremenljivke. Oznaka ∂u pa pomeni diferencial funkcije, kadar se spreminja zgolj ena izmed neodvisnih spremenljivk. Oznaka ne pove, katera spremenljivka je to. Velja dogovor, da je to tista, nad katere diferencialom je zapisan. Pri rokovanju z diferenciali bomo morali na to paziti. V izrazu $\mathrm{d}u = (\partial u/\partial x)\mathrm{d}x + (\partial u/\partial y)\mathrm{d}y$, na primer, ne smemo krajšati diferencialov ∂x in dx ter ∂y in dy, ker s tem pridelamo izraz $\mathrm{d}u = \partial u + \partial u$, v katerem je izgubljena informacija o merodajnih spremenljivkah. Zato oba diferenciala ∂u nista med seboj enaka (čeravno sta enako zapisana) in ju ne smemo sešteti v $2\partial u$.

15.6 Verižno odvajanje

Verižno pravilo

V funkciji $u = u(x, y)$ je vsaka neodvisna spremenljivka lahko funkcija tretje spremenljivke t, torej $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Zgled je plin pod zunanjim tlakom in temperaturo, ki se spreminjata s časom. Pojavi se vprašanje, kako izračunati odvod du/dt. Diferencial du delimo z dt in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,. \tag{15.11}$$

To je *verižno pravilo* odvajanja.

Kaj pa, če je vsaka neodvisna spremenljivka funkcija dveh, ne ene, spremenljivke: $x = x(t, s)$ in $y = y(t, s)$? Ravnamo tako kot prej:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{15.12}$$

in podobno za $\partial u/\partial s$. Sedaj vidimo, kakšna moč se skriva v pametni notaciji!

Implicitno odvajanje

Funkcija dveh spremenljivk je lahko podana tudi v implicitni obliki $F(x, y, u(x, y)) = 0$. Če gre, iz nje izrazimo $u = u(x, y)$ in izračunamo njene parcialne odvode. Lahko pa ravnamo drugače. Izraz F razumemo kot funkcijo treh spremenljivk, od katerih sta dve med seboj neodvisni, tretja pa je odvisna od njiju. Enačbo na obeh straneh odvajamo po verižnem pravilu na x, pri čemer upoštevamo $\partial x/\partial x = 1$ in $\partial y/\partial x = 0$:

$$F(x,y,u) = 0 \Longrightarrow F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{15.13}$$

Sledi $\partial u/\partial x = -F_x/F_u$. Podobno izračunamo tudi odvod $\partial u/\partial y$.

15.7 Razvoj v potenčno vrsto

Posredni razvoj

Tudi funkcijo dveh spremenljivk hočemo razviti v potenčno vrsto okrog točke $(0, 0)$. Funkcijo zapišemo kot $u(x, y) = u(x(t), y(t)) = u(t)$ in postavimo $x(t) = \alpha t$ in $y(t) = \beta t$. Seveda velja razvoj v vrsto $u(t) = u(0) + u't + 1/2 \cdot u"t^2 + \ldots$ Nato izračunamo odvod $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ po verižnem pravilu, pri čemer upoštevamo $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \alpha$ in $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \beta$. Podobno izračunamo drugi odvod $u" = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$. Dobljena odvoda vstavimo v vrsto in pridelamo

$$\begin{gathered} u(x, y) = u(0, 0) + \\ xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\,(x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy}) + \ldots \end{gathered} \tag{15.14}$$

Operatorski zapis

Odvodi so vsi računani v točki $(0, 0)$. Seveda lahko funkcijo razvijemo tudi okrog kake druge točke (a, b). Tedaj velja, v polepšanem zapisu,

$$\begin{gathered} u(a{+}x,b{+}y) = u(a,b) + \\ \frac{1}{1!}\,(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})u + \frac{1}{2!}\,(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^2 u + \ldots \end{gathered} \tag{15.15}$$

Koeficienti so odvisni le od vrednosti funkcije in njenih parcialnih odvodov v točki (a, b). Višje parcialne odvode smo zapisali na kratko kot "potence". Izraz $(\partial/\partial x)^2$, na primer, pomeni $\partial^2/\partial x^2$, to je drugi odvod.

15.8 Maksimum in minimum

Prvi odvod

Hribi imajo svoje vrhove in globeli. To so njihovi *lokalni ekstremi*. Ekstremi so lahko samo v točkah, kjer sta oba parcialna odvoda u_x in u_y enaka nič. Ugotoviti je treba še, ali gre v takih *stacionarnih točkah* za maksimum ali minimum ali morda za sedlo.

Drugi odvod

Naj bo stacionarna točka (a, b). Navpični presek $u(x, b)$ skoznjo je funkcija zgolj ene spremenljivke. Kot vemo, ima taka funkcija maksimum, ako je njen drugi odvod negativen, in minimum, ako je drugi odvod pozitiven. Podobno velja za funkcijo $u(a, y)$. Tako lahko že rečemo: v maksimumu morata biti oba odvoda u_{xx} in u_{yy} negativna in v minimumu pozitivna. Toda to še ni dovolj. Drugi odvod v katerikoli smeri, ne zgolj v smeri koordinatnih osi, mora biti negativen (v maksimu) oziroma pozitiven (v minimumu).

Kriterij za ekstrem

Okrog stacionarne točke razvijemo funkcijo v potenčno vrsto do kvadratnih členov, pri čemer postavimo oba prva odvoda na nič. Dobimo, da je $u(a+h, b+k)$ enako $u(a,b) + 1/2 \cdot (u_{xx}h^2 + 2u_{xy}hk + u_{yy}k^2)$. Da bo v točki maksimum, mora biti drugi člen negativen za vsak h in k. Za minimum pa mora biti ta člen pozitiven. Da bo to res, mora četverica drugih odvodov zadoščati določenemu kriteriju. Kakšen je ta kriterij?

Drugi člen (brez faktorja 1/2) zapišemo v taki obliki, da se znebimo člena z mešanim faktorjem hk: $Q = A[(h + Bk/A)^2 + (CA - B^2)k^2/A^2]$. Pri tem smo druge odvode zaradi kratkosti označili s črkami A, B in C. Pri pozitivnem A je količina Q za vsak h in k pozitivna, če je le $CA - B^2 > 0$. Pri negativnem A pa je količina Q vseskozi negativna pri istem pogoju. Iskani pogoj za ekstrem je torej

$$u = \max \Longleftrightarrow \mathrm{u}_{xx} < 0, u_{yy} < 0 \,\mathrm{in}\, u_{xx}u_{yy} - {u_{xy}}^2 > 0 \tag{15.16}$$

$$u = \min \Longleftrightarrow \mathrm{u}_{xx} > 0, u_{yy} > 0 \,\mathrm{in}\, u_{xx}u_{yy} - {u_{xy}}^2 > 0\,. \tag{15.17}$$

Rečemo, da je to diskriminanta drugih odvodov.

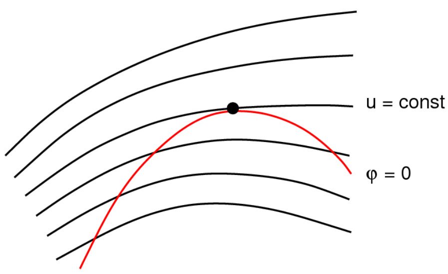
15.9 Vezani ekstremi

Presek ploskve

Hribovje v mislih prerežemo z navpično ravnino v smeri sever-jug pri koordinati $x = a$, ali pa v smeri vzhod-zahod pri koordinati $y = b$. Nastaneta ravninski krivulji $u = u(a, y)$ ali $u = u(x, b)$. Kje ima taka krivulja ekstreme, že znamo določiti. Kaj pa, če se po hribih vije cesta, katere talne koordinate so opisane z enačbo, bodisi eksplicitno ali implicitno? Kje na cesti so njeni ekstremi? Za splošno funkcijo $u = u(x, y)$ želimo torej najti ekstreme, ki zadoščajo dodatnemu pogoju

$$\varphi(x, y) = 0\,. \tag{15.18}$$

Rečemo, da so to *vezani ekstremi*.



Slika 15.5 Vezani ekstrem. Ploskev je podana z izohipsami. V ekstremni točki je tangenta na krivuljo tudi tangenta na lokalno izohipso.

Sovpad tangent

Slika kaže naslednje. Ko se premikamo po krivulji $\varphi = 0$, doživljamo različne vrednosti u. Tam, kjer naletimo na ekstrem, sta tangenti na φ in u enaki: $u_x/u_y = \varphi_x/\varphi_y$. Drugače povedano:

$$u_x + \lambda\varphi_x = 0 \qquad (15.19)$$
$$u_y + \lambda\varphi_y = 0\,,$$

pri čemer je λ (še neznani) sorazmernostni faktor med odvodi. Zapisani enačbi in pogoj $\varphi = 0$ tvorijo sistem treh enačb s tremi neznankami x, y in λ. Njegova rešitev nam da stacionarne točke. Ali so to maksimumi ali minimumi, pa pove diskriminanta drugih odvodov na že znani način.

15.10 Ploščinski integrali

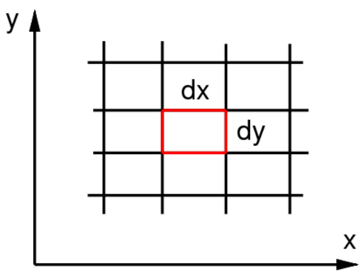
Ploskovna gostota

Funkcija $u = u(x, y)$ lahko opisuje tudi porazdelitev mase ali električnega naboja po ravnini: $u = \mathrm{d}m/\mathrm{d}S$ ali $u = \mathrm{d}e/\mathrm{d}S$. Masa (ali naboj), ki je naložena na dveh ločenih ploskovnih elementih $\mathrm{d}S$, se sešteva. Rečemo, da je *ekstenzivna količina*. Za temperaturo, na primer, pa to ne velja. Pravimo, da je *intenzivna količina*. Naj bo torej U ekstenzivna količina in $u = \mathrm{d}U/\mathrm{d}S$ njena *ploskovna gostota*. Nad izbranim ravninskim območjem je potem nakopičena tolikšna limitna vsota:

$$U = \int u\,\mathrm{d}S\,. \qquad (15.20)$$

Razcep integrala

Kako naj izračunamo zapisani integral? Naj bo ravninsko področje pravokotnik $[a, b] \times [c, d]$. Vzdolžno in prečno ga razrežemo v ozke trakove. Tako dobimo ploščinske elemente $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Slika 15.6 Ploščinski elementi v kartezičnih koordinatah. Integracija poteka najprej po vrsticah in nato po stolpcih oziroma obratno.

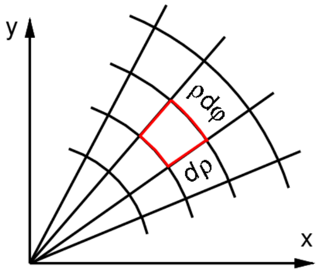
Potem integriramo po vsakem pasu vzdolž smeri x, pri čemer obravnavamo y kot parameter; dobimo delne vsote $\Delta U(y) = \int u(x, y)\,\mathrm{d}x$. Nato integriramo dobljene vsote vzdolž smeri y: $U = \int \Delta U(y)\,\mathrm{d}y$. Seveda lahko integriramo tudi obrnjeno: najprej vzdolž osi y in nato vzdolž osi x. Velja torej

$$U = \int\!\!\int u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b u\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d u\,\mathrm{d}y\,. \qquad (15.21)$$

Kadar definicijsko območje funkcije ni pravokotnik, ampak je krivočrtni lik, računamo z ustreznim spremenljivim intervalom $[a(y), b(y)]$ ali $[c(x), d(x)]$.

Polarni razcep

Posebno lep krivočrten tloris je tak, ki ima obliko kroga okoli izhodišča. V tem primeru ga je smiselno razrezati v ploskovne elemente z radialnimi premicami $\varphi = \mathrm{const}$ in s koncentričnimi krogi $\rho = \mathrm{const}$.



Slika 15.7 Ploščinski elementi v polarnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto $u(\rho, \varphi)$.

Elementi, ki jih tako pridelamo, imajo ploščine $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\rho \cdot \rho \, \mathrm{d}\varphi$. Ploskovna gostota na teh elementih mora biti podana kot $u(\rho, \varphi)$. Skupna ekstenzivna količina tedaj znaša

$$U = \int\int u\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \,. \tag{15.22}$$

Integriramo po ustreznem "pravokotnem" področju, recimo $[0, R] \times [0, 2\pi]$.

Uporaba v geometriji

Posebej odlikovana ekstenzivna količina, ki jo lahko naložimo na ploskovni element $\mathrm{d}S$, je prostornina prizme $\mathrm{d}V$ nad njim. Ploskovna gostota je v tem primeru kar višina ploskve h. Integral $U = \int u \, \mathrm{d}S$ potem pomeni $V = \int h \, \mathrm{d}S$. Tako računamo prostornine teles, ki jih zamejujejo krovne ploskve. Če ima "krovna" ploskev negativno višino, torej če leži pod koordinatno ravnino, je izračunana prostornina negativna.

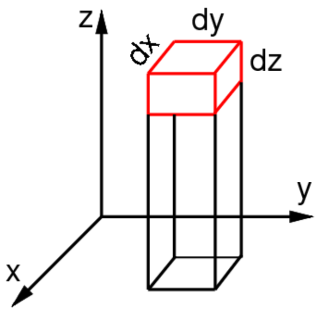
15.11 Prostorninski integrali

Ekstenzivna količina je lahko porazdeljene tudi po prostoru. Tedaj jo pač integriramo tam in sicer natanko tako, kot po ravnini:

$$U = \int u \, \mathrm{d}V. \tag{15.23}$$

Razcep integrala

Če ima preučevani prostor obliko kvadra, ga razkosamo na drobne kocke $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ in integriramo.



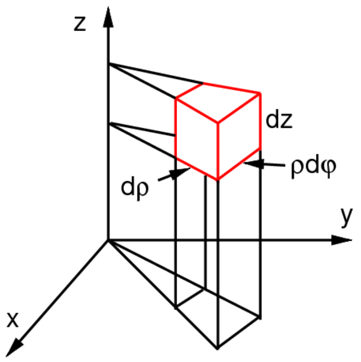
Slika 15.8 Prostorninski elementi v kartezičnih koordinatah. Integracija poteka po širini, globini in višini v tem ali kakem drugem vrstnem redu.

Integriramo po ustreznem kvadru, recimo po $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$:

$$U = \int\int\int u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z. \tag{15.24}$$

Cilindrični razcep

Cilindrični prostor je bolje razkosati na prostorninske elemente $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\rho \cdot \rho \, \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$.



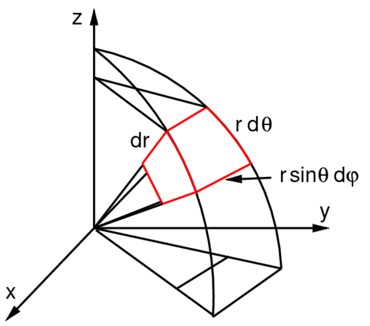
Slika 15.9 Prostorninski elementi v cilindričnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto $u(\rho, \varphi, z)$.

Integriramo po potrebnem "kvadru", recimo $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H]$:

$$U = \int\int\int u \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z. \quad (15.25)$$

Krogelni razcep

Krogelni prostor pa je naravno razkosati na elemente $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \cdot r \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \cdot r \, \mathrm{d}\theta$.



Slika 15.10 Prostorninski elementi v krogelnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto $u(r, \varphi, \theta)$.

Integriramo po "kvadru", recimo $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

$$U = \int\int\int u \, r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta. \quad (15.26)$$

15.12 Večkratni integrali

Poleg ekstenzivnih količin, ki so porazdeljene po ravnini ali prostoru, poznamo tudi take, ki so porazdeljene po prostorskem kotu, na primer svetilnost $I = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega$. V tem primeru ne integriramo po ravnini, ampak po kotu $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

Konfiguracijski prostor

Nasploh velja, da lahko integriramo kakršnokoli ekstenzivno skalarno funkcijo, ki je porazdeljena po eno-, dvo- ali večdimenzionalnem *konfiguracijskem prostoru*. Če integriramo po enodimenzionalnem prostoru, imamo opravka z navadnim integralom, če po večdimenzionalnem, pa z večkratnim integralom. □