14 Vektorji in matrike

Premiki – Vektorji – Razteg in vsota – Enotni vektorji – Skalarni produkt – Vektorski produkt – Dvojni produkti – Matrike – Posebne matrike – Računske operacije – Sistem linearnih enačb – Inverzna matrika – Lastni vektorji – Diagonalizacija

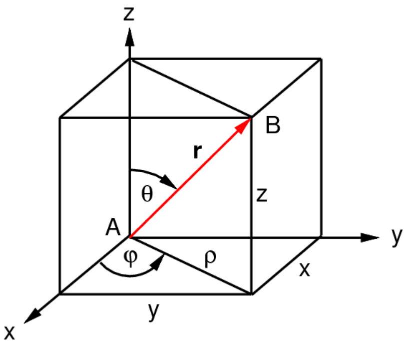
14.1 Premiki

Premik kot puščica

Človek se iz kraja A lahko premakne v različne sosednje kraje B, C, D itd. Vsak tak premik si predstavljamo kot ravno puščico iz začetne točke v končno točko. Zamišljena puščica ima dolžino in smer. Puščico iz točke A v točko B, na primer, bomo označili z $\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}$.

Komponente premika

Kako bi premik $\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}$ opisali kvantitativno? V začetni točki A si zamislimo primeren koordinatni križ, recimo takega z vzhodno (x), severno (y) in navpično (z) osjo, in pogledamo, kakšne so projekcije premika na te osi.



Slika 14.1 Premik in njegove komponente.

Projekcije premika na koordinatne osi znašajo x, y in z. Rečemo, da so to *komponente* premika v postavljenem koordinatnem sistemu. Z njimi sta popolnoma določeni dolžina in smer premika. Za trojico komponent zato rečemo, da *reprezentirajo* premik v izbranem koordinatnem sistemu in zapišemo na kratko (če izpustimo oznako začetne in končne točke)

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)\,. \tag{14.1}$$

Dolžina in usmerjenost premika

Dolžino premika označimo z r. Hipotenuzni izrek (7.4) in definicije kotnih funkcij (10.13) povedo, da veljajo naslednje povezave med komponentami ter velikostjo in usmeritvijo premika:

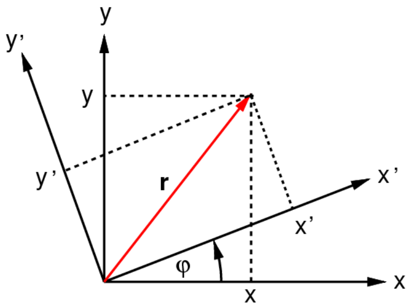
$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= r\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Poljubna točka prostora je torej enolično določena s *kartezičnimi* koordinatami x, y, z; s *cilindričnimi* koordinatami φ, ρ, z; ali s *sferičnimi* koordinatami φ, θ, r.

14.2 Vektorji

Zasuk koordinatnega sistema

Koordinatni sistem smo usmerili po straneh neba. Kaj če sistem zasučemo, recimo okrog navpične osi za kot φ v nasprotni smeri urinega kazalca?



Slika 14.2 Zasuk koordinatnega sistema. Prikazan je zasuk okrog osi z. V zavrtenem sistemu so komponente vektorja spremenjene, vektor sam, kot premik v prostoru, pa ostaja nespremenjen.

V zasukanem koordinatnem sistemu ima premik $\boldsymbol{r}$ komponente x', y' in z'. Iz risbe razberemo, da velja med obojimi komponentami naslednja povezava:

$$\begin{aligned} x' &= +x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Sistem lahko zasučemo tudi okrog kake druge osi – vzhodne, severne ali poljubno nagnjene. Povezave med starimi in novimi projekcijami so tedaj drugačne.

Invarianca dolžine

Čeprav so komponente preučevanega premika v različnih sistemih lahko različne, pa vendarle opisujejo isti premik. Izhodiščna in ciljna točka ležita namreč relativno glede na ves snovni svet enako, ne glede na to, na kateri del sveta ju relativiziramo.

Dolžina premika mora biti v vseh koordinatnih sistemih enaka. Pri zasukanem sistemu (recimo tistem okrog navpične osi) se v to prepričamo s kvadriranjem in seštevanjem leve in desne polovice transformacij (14.3). Dobiti moramo in tudi dobimo

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2\,. \tag{14.4}$$

Vektorji

Velikosti in smeri v prostoru nimajo samo premiki, ampak tudi druge preko njih definirane količine, na primer (v fiziki) hitrost ali pospešek ali sila. Rekli bomo, da so to *vektorji*. Vektorji so torej količine, ki imajo poleg velikosti še smer v prostoru. Premik je njihov prototipni predstavnik. Vektorje bomo označevali s poudarjenimi črkami, na primer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. V komponentni obliki pa bomo namesto oznak x, y, z raje pisali oznake 1, 2 in 3, na primer $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Takšne splošne vektorje si bomo predstavljali kar kot premike. Z njimi hočemo tudi računati, to je, razviti hočemo vektorski račun (Gibbs).

14.3 Razteg in vsota

Razteg vektorja

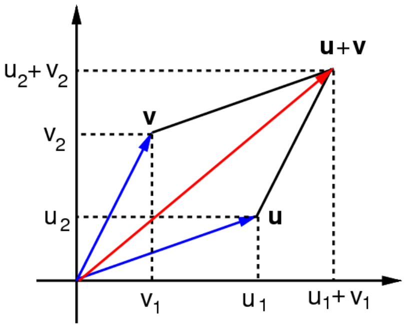
Sani, ki drsijo po ledu premo in enakomerno, opravijo v enotnem času, recimo v 1 sekundi, nek premik. V daljšem času pa opravljeni premik "podaljšajo". To nas navede, da definiramo "razteg" vektorja kot množenje vektorja s skalarjem:

$$\lambda \boldsymbol{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)\,. \tag{14.5}$$

Kadar je skalar negativen, se smer nastalega vektorja obrne. Očitno velja $\lambda \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\lambda$ in $\lambda(\mu \boldsymbol{u}) = \mu(\lambda \boldsymbol{u}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{u}$.

Vsota vektorjev

Ladja na morju opravi premik iz točke A v točko B in nato še premik iz točke B v točko C. S tem definira rezultantni premik iz A v C. To nas navede, da definiramo vsoto dveh vektorjev takole: na konec prvega vektorja nataknemo začetek drugega, sestavljeni vektor pa sega od začetka prvega do konca drugega vektorja. Alternativno lahko začetek drugega vektorja premaknemo v izhodišče prvega vektorja, sestavljeni vektor pa je enak diagonali ustvarjenega paralelograma. To je že znano paralelogramsko pravilo sil (v fiziki).



Slika 14.3 Vsota dveh vektorjev. Prototip je seštevanje dveh premikov ali dveh sil po paralelogramskem pravilu.

Risba pokaže:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\,. \tag{14.6}$$

Vsota je očitno komutativna in asociativna. Glede na produkt s skalarjem pa je distributivna.

Linearna kombinacija vektorjev

Množenje vektorja s skalarjem in seštevanje vektorjev lahko združimo v izraz $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} + \nu \boldsymbol{w}$. To je *linearna kombinacija* treh vektorjev. Njen rezultat je seveda vektor. Če trije vektorji med seboj niso paroma vzporedni, lahko s primerno izbiro treh skalarjev poustvarimo kakršenkoli vektor.

14.4 Enotni vektorji

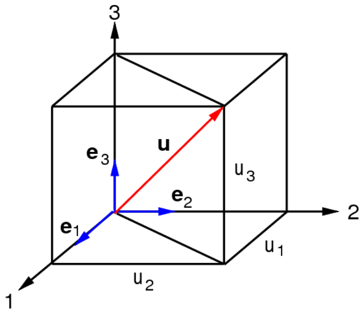
Enotni vektorji

Pa opremimo izhodišče koordinatnega sistema s tremi vektorji, ki rastejo vzdolž vsake osi! Naj imajo ti vektorji dolžine 1. To so *enotni vektorji*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0) \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0) \\ \boldsymbol{e}_3 &= (0, 0, 1)\,. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Z njimi lahko poustvarimo kakršenkoli vektor. Potrebni skalarni koeficienti so kar enaki komponentam vektorja:

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = \sum u_i\boldsymbol{e}_i\,. \tag{14.8}$$



Slika 14.4 Enotni vektorji.

Računanje z njimi

Z uporabo enotnih vektorjev zapišemo razteg vektorja kot $\lambda\boldsymbol{u} = \lambda\sum u_i\boldsymbol{e}_i = \sum \lambda u_i\boldsymbol{e}_i$ in vsoto dveh vektorjev kot $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \sum u_i\boldsymbol{e}_i + \sum v_i\boldsymbol{e}_i = \sum(u_i+v_i)\boldsymbol{e}_i$. Dosedanje računanje z vektorji lahko torej formalno prevedemo na računanje z relativnimi števili in tremi enotnimi vektorji, pri čemer se delamo, kot da so ti navadni skalarji.

14.5 Skalarni produkt

Sila F, ki deluje na telo pod kotom φ glede na njegov premik s, opravlja delo $Fs\cos\varphi$ (pravi fizika). To nas navede, da definiramo *skalarni produkt* dveh vektorjev:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = uv\cos\varphi\,. \tag{14.9}$$

Specialno za enotne vektorje velja, na primer $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = 0$ itd. Produkt dveh enakih enotnih vektorjev (med katerima je kot 0°) je enak 1. Produkt dveh različnih enotnih vektorjev (med katerima je kot 90°) pa je enak 0.

Zapis s komponentami

Kako bi skalarni produkt zapisali s komponentami? Vsak vektor zapišemo z enotnimi vektorji in navzkrižno pomnožimo vse člene. Potem upoštevamo, kaj pomenijo nastali produkti enotnih vektorjev (nič ali ena), in dobimo v komponentnem zapisu

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,. \tag{14.10}$$

Poseben primer nastane, če množimo vektor s samim seboj. Potem dobimo

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = u^2. \tag{14.11}$$

Skalarni produkt dveh vektorjev je skalar. Skalar je enak v vsakem koordinatnem sistemu. To pomeni, da je skalarni produkt invarianten glede na spremembo koordinatnega sistema.

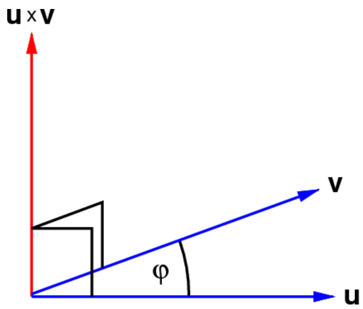
Z računi se prepričamo, da je skalarni produkt komutativen, ni acociativen in je distributiven nad vsoto.

14.6 Vektorski produkt

Sila F, ki deluje na drog pri razdalji r od njegove vrtilne točke, in sicer pod kotom φ, izvaja navor $Fr\sin\varphi$ (pravi fizika). To nas navede, da definiramo *vektorski produkt* dveh vektorjev:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = uv\sin\varphi\cdot\boldsymbol{n}\,, \tag{14.12}$$

pri čemer je $\boldsymbol{n}$ enotni vektor, pravokoten na ravnino obeh vektorjev in usmerjen v smeri gibanja desnega vijaka, ko prvi vektor zavrtimo proti drugemu.



Slika 14.5 Vektorski produkt. Prototip je navor, ki ga ustvarjata sila in ročica.

Specialno za enotne vektorje velja, na primer $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1 = 0$, $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ ipd. Produkt dveh enakih enotnih vektorjev (med katerima je kot 0°) je enak 0. Produkt dveh različnih enotnih vektorjev (med katerima je kot 90°) pa je enak tretjemu vektorju s pozitivnim ali negativnim predznakom, kakor pač že pove pravilo vijaka.

Zapis s komponentami

Tudi vektorski produkt hočemo zapisati s komponentami. Ravnamo tako kot pri skalarnem produktu in dobimo

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\,. \tag{14.13}$$

Vektorski produkt dveh vektorjev je vektor. Z računi se prepričamo, da je antikomutativen $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, ni asociativen in je distributiven nad vsoto.

14.7 Dvojni produkti

Ker je vektorski produkt vektor, se pojavi vprašanje, kaj se zgodi, če ga pomnožimo še z enim vektorjem, bodisi skalarno ali vektorsko.

Skalarno vektorski produkt

Produkt $\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ poimenujemo *skalarno vektorski* produkt. Je skalar. Izraz v oklepaju je številsko enak ploščini paralelograma s stranicama u in v in ima smer njegove normale. Skalarno pomnožen s prvim faktorjem pa postane enak prostornini paralelepipeda s stranicami u, v in w. Prostornina je neodvisna od tega, kateri dve stranici določata bazo in katera določa višino. Zato lahko pišemo tudi

$$\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}\,. \tag{14.14}$$

Znaka za skalarni in vektorski produkt lahko torej zamenjamo, če le obdržimo vrstni red faktorjev.

Vektorsko vektorski produkt

Produkt $\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ poimenujemo *vektorsko vektorski* produkt. Je vektor. Pravokoten je na smer tako prvega kot drugega (oklepajnega) faktorja. To pomeni, da je koplanaren z vektorjema v oklepaju. Račun s koordinatami pokaže:

$$\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})\,. \tag{14.15}$$

Rezultat je razlika koplanarnih vektorjev, pri čemer je vsak skalarno pomnožen s skalarnim produktom preostalih dveh vektorjev.

14.8 Matrike

Preslikava vektorjev

Ko pomnožimo vektor $\boldsymbol{x}$ s skalarjem λ, ga raztegnemo v vektor $\boldsymbol{u}$. Vsaka komponenta vektorja se pri tem raztegne enako: $u_i = \lambda x_i$. Kaj pa, če vsako komponento pomnožimo z drugačnim skalarjem: $u_i = \lambda_i x_i$? Potem je nastali vektor ne samo raztegnjen, ampak tudi zavrten. Z izbiro trojice λ_i je popolnoma določeno, kakšen vektor nastane iz poljubnega vhodnega vektorja: komponente novega vektorja so sorazmerne istoležnim komponentam vhodnega vektorja. Najsplošnejšo sorazmernost pa zapišamo kot

$$\begin{aligned} u_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ u_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ u_3 &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3\,. \end{aligned} \tag{14.16}$$

S koeficienti A_{ij} je preslikava vhodnih vektorjev v izhodne popolnoma določena.

Sorazmernostna matrika

Zapisani sistem enačb ima na levi strani izhodni vektor in na desni strani tablico koeficientov, "pomešano" z vhodnim vektorjem. Morda lahko to zmešnjavo nekako razcepimo na dva ločena dela? S srečno roko zapišemo takole

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \tag{14.17}$$

in deklariramo, da sta oba zapisa ekvivalentna. S tem smo na mah vpeljali: zapis vektorja kot stolpca; kvadratno tablico števil, *matriko*; in množenje matrike z vektorjem. Komponento i izhodnega vektorja dobimo, ko skalarno pomnožimo i-to vrstico matrike z vhodnim stolpcem:

$$u_i = \textstyle\sum_j A_{ij} x_j\,. \tag{14.18}$$

Na kratko bomo vse skupaj zapisali kar

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\,. \tag{14.19}$$

Matrika je torej *operator*, ki preslika en vektor v drugega; kakšna natančno je preslikava, je pa seveda odvisno od konkretnih elementov matrike. Poljubne matrike bomo označili s črkami $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ in podobno. Z njimi hočemo tudi računati, to je, razviti hočemo matrični račun (CAYLEY).

14.9 Posebne matrike

Enotna matrika

Kakšna je matrika, ki katerikoli vhodni vektor preslika v enak izhodni vektor?

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14.20}$$

Diagonalna matrika

Pa tista, ki katerikoli vhodni vektor raztegne vzdolž treh osi za faktorje λ_1, λ_2 in λ_3?

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{14.21}$$

Seveda so lahko vsi trije faktorji med seboj enaki. Tedaj se vektor zgolj raztegne in nič ne zavrti.

Rotacijske matrike

Kaj pa matrika, ki katerikoli vhodni vektor zavrti okrog osi 3 za kot φ v nasprotni smeri urinega kazalca? Očitno je taka matrika opisana z zasukom koordinatnega sistema okrog osi 3 v smeri urinega kazalca:

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14.22}$$

Matriki, ki vrtita vektorje okrog drugih dveh osi, sta podobni. Rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_i$ ima $R_{ii} = 1$, vse ostale elemente v i-ti vrstici in i-tem stolpcu enake 0, štirje preostali elementi pa vsebujejo že zapisano četverico sinusov in kosinusov s primernimi predznaki.

14.10 Računske operacije

Produkt s skalarjem

Produkt matrike s skalarjem definiramo tako, da raztegne (seveda tudi skrči ali obrne) siceršnje izhodne vektorje: $(\lambda\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x})$. Da to drži, moramo vpeljati predpis

$$\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow B_{ij} = \lambda A_{ij}\,. \tag{14.23}$$

Vsota

Vsoto dveh matrik definiramo tako, da proizvede vsoto siceršnjih posamičnih izhodnih vektorjev: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x}$. To je res, če vpeljemo pravilo

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}\,. \tag{14.24}$$

Produkt

Produkt dveh matrik pa definiramo z zaporednim delovanjem posamičnih matrik: $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x})$. Da bi bilo to res, moramo vpeljati določilo

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow C_{ij} = \textstyle\sum_k A_{ik} B_{kj}\,. \tag{14.25}$$

V produktni matriki je ij-ti element enak skalarnemu produktu i-te vrstice prvega faktorja in j-tega stolpca drugega faktorja.

Lastnosti operacij

Pri računanju veljajo – z eno izjemo – enaki zakoni kot med skalarji. Vsota je komutativna in asociativna. Produkt ni komutativen, a je asociativen. Produkt je distributiven nad vsoto. Množenje s skalarjem je distributivno nad vsoto in asociativno s katerimkoli faktorjem produkta.

14.11 Sistem linearnih enačb

Če imamo podano sorazmernost $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$, lahko za vsak vhodni vektor $\boldsymbol{x}$ izračunamo izhodni vektor $\boldsymbol{u}$. Kaj pa, če je podan izhodni vektor, kako potem izračunamo vhodnega? Očitno moramo rešiti sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami.

Dovoljene pretvorbe

Sistem enačb se ne spremeni, če zamenjamo dve vrstici; če množimo vsak člen v vrstici z istim skalarjem; ali če k vrstici prištejemo ali odštejemo drugo vrstico. Da bo manj pisanja, zapišemo sistem kar s koeficienti:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & u_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & u_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & u_3 \end{vmatrix}. \tag{14.26}$$

To je "razširjena" matrika, zlepek "prave" matrike in izhodnega vektorja. Z naštetimi manipulacijami nad celotnimi vrsticami poskušamo pravo matriko preoblikovati v enotno matriko, pri čemer se desni stolpec preoblikuje v iskano rešitev:

$$[\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{u}] \to [\boldsymbol{I} \,|\, \boldsymbol{x}]\,. \tag{14.27}$$

Postopek reševanja

Preoblikovanje organiziramo takole

1. Na vrh postavimo vrstico, ki ima (absolutno) največji prvi koeficient.

2. Vsako naslednjo vrstico delimo z njenim prvim členom (da dobimo vodilno 1) ter pomnožimo z vodilnim členom prve vrstice, nakar od nje odštejemo prvo vrstico. Tako dobimo vodilno 0.

3. Pokrijemo prvo vrstico in prvi stolpec in nadaljujemo, dokler ne pridelamo matrike, ki ima pod diagonalo same 0.

4. Postopek ponovimo od spodaj navzgor, da dobimo diagonalno matriko.

Vsako vrstico delimo z diagonalnim členom, da nastane enotna matrika.

Ker na vrh prenašamo vrstice z največjim vodilnimi členi, se izogibamo deljenju z majhnimi števili in s tem minimiziramo zaokrožitvene napake.

14.12 Inverzna matrika

Matrična enačba $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ je po obliki enaka kot skalarna enačba $Ax = u$. Kako pa rešimo slednjo? Tako, da jo na obeh straneh množimo z $1/A$, to je s takim številom, da postane koeficient pred neznanko enak ena. Pa storimo tako tudi z matrično enačbo!

Sistem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ pomnožimo na obeh straneh s tako, še neznano matriko $\boldsymbol{A}^{-1}$, da velja

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}\,. \tag{14.28}$$

Postopek reševanja

S tem je sistem formalno rešen. Kako pa bi določili to *inverzno matriko*? Ker velja $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$, zapišimo razširjeno matriko

$$\left|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 1 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|. \tag{14.29}$$

Na enak način kot pri reševanju sistema enačb pretvorimo levo matriko v enotno matriko, pri čemer na desni nastane inverzna matrika

$$[\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{I}] \to [\boldsymbol{I} \,|\, \boldsymbol{A}^{-1}]\,. \tag{14.30}$$

Ko z njo pomnožimo izhodni vektor, dobimo iskano rešitev.

Sistem enačb lahko torej rešimo neposredno ali po ovinku, z inverzno matriko. Hitrejša je prva pot. Kadar pa je treba rešiti več sistemov enačb, ki se med seboj ločijo le po izhodnem stolpcu, je hitrejša druga pot.

Inverzija posebnih matrik

Za posebne matrike dobimo naslednje inverzne matrike. Enotna matrika se invertira v enotno matriko. Diagonalna matrika se invertira v diagonalno matriko, katere elementi so enaki recipročnim vrednostim originalnih elementov. Katerakoli rotacijska matrika pa se invertira v takšno matriko, katere stolpci so enaki originalnim vrsticam; rečemo, da je to transponirana matrika $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$.

14.13 Lastni vektorji

Matrika je operator, ki požira vhodne vektorje in iz njih izdeluje izhodne vektorje. Slednji so v splošnem zavrteni in raztegnjeni. Pojavi se vprašanje, ali kateri od njih morda niso zavrteni, ampak samo raztegnjeni. Take vektorje bomo poimenovali *lastne vektorje* matrike. Faktorje, za katere so ti vektorji raztegnjeni, pa bomo imenovali *lastne vrednosti* matrike.

Lastni vektorji posebnih matrik

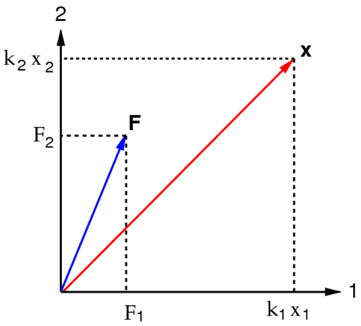
Identična matrika $\boldsymbol{I}$ spremeni vhodni vektor (u_1, u_2, u_3) v izhodni vektor (u_1, u_2, u_3). Vektor ni ne zasukan ne raztegnjen, ampak popolnoma enak vhodnemu. Matrika ima torej neskončno mnogo lastnih vektorjev. Vse pripadajoče lastne vrednosti so enake 1.

Diagonalna matrika $\boldsymbol{D}$ spremeni vhodni vektor (u_1, u_2, u_3) v izhodnega $(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3)$. Izhodni vektor je torej raztegnjen in zasukan. Vektor $(u_1, 0, 0)$ se spremeni v $(\lambda_1 u_1, 0, 0)$; ta vektor je zgolj raztegnjen in ni nič zasukan. Podobno velja za vektorja $(0, u_2, 0)$ in $(0, 0, u_3)$. Vektor $(u_1, 0, 0)$ ima lahko poljubno vrednost komponente u_1, pa je še zmeraj lastni vektor. Da se izognemo takšni mnogoličnosti, ga normiramo, da znaša njegova dolžina 1, torej: $(1, 0, 0)$. (To naredimo tako, da vsako komponento delimo z absolutno vrednostjo vektorja.) Podobno naredimo z ostalima dvema lastnima vektorjema. Normiranje vektorjev ne spremeni njihovih lastnih vrednosti, ki znašajo λ_1, λ_2 in λ_3.

Rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_3$ zavrti vsak vektor razen tistega, ki kaže vzdolž osi 3. To je – v normirani obliki – vektor $(0, 0, 1)$. Njegova lastna vrednost je 1. Podobno velja tudi za drugi dve rotacijski matriki.

Zasuk matrike

Povezava med dvema vektorjema v naravi poteka dostikrat v kosu snovi. Dober primer je atom v kristalu, ki je na okolišnje atome privezan s tremi "vzmetmi" v treh pravokotnih smereh. Če deluje na atom zunanja sila $\boldsymbol{F}$ vzdolž kakšne vzmeti, se atom premakne v smeri sile za premik $\boldsymbol{x}$. Za majhne sile velja $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$. Če pa deluje sila poševno in vzmeti niso enako močne, nastali premik ni več vzporeden s silo. Za majhne sile velja $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$. Vektor sile torej ustvarja na atomu vektor premika. Lahko tudi rečemo, da atom preslikuje vhodni vektor (silo) v izhodni vektor (premik). V nekaterih snoveh je izhodni vektor zmeraj vzporeden z vhodnim vektorjem, ne glede na to, kako je slednji usmerjen. V drugih snoveh pa je bolj ali manj poševen. Le vzdolž nekaterih smeri je usmerjen kolinearno. Atom in njegove vezi s sosedi v snovi torej določajo, kje potekajo te osi. To so *glavne osi* preslikave. Če kos snovi obračamo, se z njim obračajo tudi glavne osi.



Slika 14.6 Sorazmernost vektorjev. Prototip je premik atoma ($\boldsymbol{x}$), vezanega v kristalu, ki ga povzroči sila ($\boldsymbol{F}$) nanj. Osi so usmerjene vzdolž atomskih vezi z okolico.

Kosu snovi je prav vseeno, v kakšnem opazovalnem sistemu opisujemo njegovo aktivnost, torej lokalno preslikovanje vektorjev. Če je opazovalni sistem tak, da njegove osi sovpadajo z glavnimi osmi, je preslikava vektorjev opisana posebno preprosto – z diagonalno matriko. Lastni vektorji pa imajo po eno samo neničelno komponento. Kadar pa je opazovalni sistem zasukan kako drugače, se v njem tako vektorji kot matrika zapišejo v "zasukani" obliki. Diagonalna matrika dobi nediagonalne elemente, lastni vektorji pa dobijo več neničelnih komponent.

Simetrične matrike

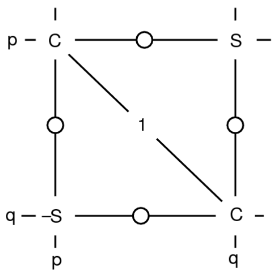
Kako zapišemo enačbo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{x}$ v koordinatnem sistemu, zasukanem okrog ene izmed glavnih osi? Na enačbo delujmo z ustrezno rotacijsko matriko $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x}$. Enotno matriko zapišemo kot $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}$, pa dobimo $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x})$. Sorazmernostna matrika $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ je *simetrična*, to je, $A_{ij} = A_{ji}$. Lastni vektorji "zasukane" simetrične matrike so očitno enaki "zasukanim" lastnim vektorjem prvotne diagonalne matrike. Lastne vrednosti obeh so pa enake.

14.14 Diagonalizacija

Iz povedanega sklepamo, da lahko vsako simetrično matriko preoblikujemo nazaj v diagonalno matriko in s tem najdemo njene lastne vektorje in lastne vrednosti. Matriko je treba "le" obdelati s primernimi rotacijskimi matrikami.

Izničenje elementa

Rotacijsko matriko, ki ima diagonalna elementa $R_{pp} = R_{qq} = \cos\varphi = c$ ter izvendiagonalna elementa $R_{pq} = -R_{qp} = \sin\varphi = s$, označimo kot $\boldsymbol{R}_{pq}$. Transformacija $\boldsymbol{R}_{pq} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}{}_{pq}$ izdela matriko $\boldsymbol{A}'$, ki je enaka izvorni matriki s spremenjenima vrsticama p in q ter stolpcema p in q. Izbrati želimo takšno rotacijsko matriko, torej takšni vrednosti c in s, da bo element A_{pq} postavljen na nič.



Slika 14.7 Diagonalizacija matrike s primernim vrtenjem.

Transformacijski izraz množimo po komponentah in upoštevamo simetrijo, pa dobimo eksplicitne enačbe za A'_{pp}, A'_{qq}, $A'_{rp}\,(r \neq p)$, $A'_{rq}\,(r \neq q)$ in A'_{pq}, vse kot funkcije brezčrtastih elementov in (še neznanih) vrednosti c in s. Postavimo $A'_{pq} = 0$, iz česar sledi $\tan 2\varphi = 2A_{pq}/(A_{qq} - A_{pp})$. S tem sta torej določeni obe vrednosti c in s, z njima rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_{pq}$ in z njo transformirana matrika $\boldsymbol{A}'$, ki ima element A'_{pq} postavljen na nič.

Postopek računanja

Diagonalizacija poteka takole. V izvorni matriki $\boldsymbol{A}$ poiščemo največji element A_{pq} nad diagonalo, z njim določimo rotacijsko matriko $\boldsymbol{R}_{pq}$ ter z njeno pomočjo izračunamo novo matriko $\boldsymbol{A}'$, ki ima ustrezen element postavljen na nič. Pri tem se nekateri preostali elementi spremenijo. Postopek ponavljamo na novi matriki, dokler ta ne postane diagonalna. Tako dobimo lastne vrednosti. Lastne vektorje pa potem določimo iz definicijske enačbe $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, ki jo zapišemo v obliki $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = 0$. Sistem rešimo za vsak λ na že znani način.

Tako. Uspeli smo diagonalizirati simetrično matriko, ki opisuje linearno odvisnost dveh vektorjev v naravi. Diagonalizacijo drugih tipov matrik in probleme, povezane s tem, pa prepustimo drugim. □